

În cei 15 ani de la apariție, Lucrările din Colecția DIDACTICA – MATE BT au fost perfecționate în fiecare an, fiind apreciate de sute de mii de elevi, dascăli și părinți ca un veritabil manual.

- ★ Respectă integral programa școlară în vigoare.
- ★ Asigură o prezentare completă a tuturor noțiunilor din programa școlară prin numeroase exemple și probleme rezolvate.
- ★ Grupează elementele de conținut ale programei școlare în unități de învățare, cu respectarea logicii interne de dezvoltare a conceptelor matematice.
- ★ Oferă un număr însemnat de probleme aplicative prin abordarea unor situații cotidiene întâlnite în viața de zi cu zi.
- ★ Oferă elevilor, dascălilor și părinților un suport eficient pentru evaluare și autoevaluare cât mai obiectivă, pentru aceasta fiecare exercițiu și problemă are specificată nota corespunzătoare, asigurând astfel o înlănțuire logică și gradată în abordarea acestora.

Coordonatorul colecției s-a evidențiat în ultimii 30 de ani prin rezultate de excepție în pregătirea matematică a elevilor, atât pentru admiterea în liceu, cât și pentru concursurile județene, terjudețene, naționale și internaționale de matematică, precum și printr-o activitate editorială iștinută (ca autor sau coautor la peste 50 de lucrări de matematică adresate elevilor și profesorilor).

*Rezultatele obținute de
profesorul ARTUR BĂLĂUCĂ
la concursurile de matematică în perioada 1979–2009*

Denumirea concursului de matematică	Numărul elevilor participanți	Premiul			Mențiuni	Premii speciale	Total elevi premiați
		I	II	III			
Etapa națională	111	15	19	11	34	20	99
Balcianiada de matematică pentru juniori (JBMO)	3	O medalie de aur, una de argint și una de bronz				-	3
Compenenți ai lotului național de juniori	16	-	-	-	-	-	-
Concursuri interjudețene	566	185	81	70	189	8	533
Gala Laureatilor concursurilor de matematică	3	-	1	1	1	-	3
Concursul Gazetei Matematice	22	7	4	4	1	-	16
Etapa județeană	520	106	56	40	180	-	382
Total	1240	313	160	126	404	28	1036

www.editurataida.ro
www.mimio.ro

Preț: 15 lei

Produs în România



ARTUR BĂLĂUCĂ

ILEANA CARMEN DĂMEAN

MONICA SAS

Mate BT

Aritmetica

Semestrul I

clasa a V-a



Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

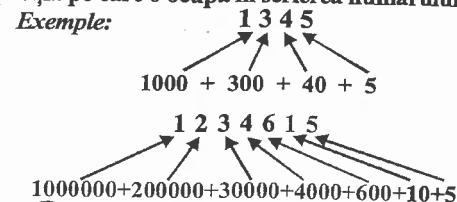


Pentru scrierea numerelor se utilizează:

- Cifre arabe: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
- Sistemul în care scriem numerele naturale este **zecimăl și pozițional** pentru că:

- Zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.
- Cifrele reprezintă valori diferite în raport cu poziția pe care o ocupă în scrierea numărului.

Exemple:



Rețineți!

○ Un număr natural de două cifre îl vom scrie sub forma ab , unde a și b sunt cifre (a este diferită de 0).

Avem: $23 = 2 \cdot 10 + 3$; $79 = 7 \cdot 10 + 9$;

○ Un număr natural de trei cifre îl vom scrie sub forma abc , unde a, b, c sunt cifre (a este diferită de 0).

Avem: $abc = 100a + 10b + c$.

Avem: $235 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5$.

○ Un număr natural de patru cifre îl vom scrie sub forma $abcd$, unde a, b, c, d sunt cifre (a diferită de 0).

Avem: $abcd = 1000a + 100b + 10c + d$.

Avem: $2314 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4$.

○ Răsturnatul numărului ab este numărul ba , dacă cifrele a și b sunt diferite de zero.

○ Răsturnatul numărului abc este numărul cba , dacă cifrele a și c sunt diferite de zero.

○ Șirul numerelor naturale este: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; ...; 99; 100; 101; ...

○ Există oricât de multe numere naturale (șirul numerelor naturale începe cu zero și este nemărginit sau infinit).

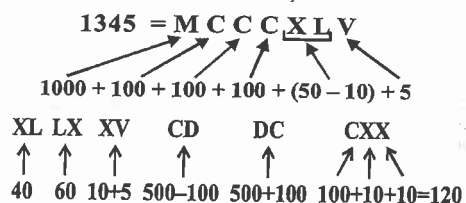
○ Oricare două numere naturale din șirul numerelor naturale se numesc **numere consecutive**.

○ Orice număr natural diferit de zero are un **predecesor** și un **succesor**.

○ Cifre romane:

I V X L C D M
1 5 10 50 100 500 1000.

○ O cifră romană, în scrierea unui număr natural își păstrează valoarea indiferent de poziția pe care o ocupă în număr, iar scrierea în sistemul roman de numerație este **nepozițională**.



○ La scrierea și citirea numerelor naturale cu cifre romane trebuie să avem în vedere următoarele reguli:

1. O cifră cu o valoare mică scrisă la stânga uneia cu valoare mai mare reprezintă o diferență: $XL = L - X$, adică 40.

2. O cifră cu o valoare mică scrisă la dreapta uneia cu o valoare mai mare reprezintă o sumă: $XV = X + V$, adică 15.

3. Cifrele V, L, D nu se pot repeta consecutiv.

4. Cifrele I, X, C, M pot fi scrise consecutiv de cel mult trei ori.

5. Orice cifră sau grup de trei cifre barate cu o linie este multiplicată de 1000 de ori.

$\overline{V} = 5000$; $\overline{XL} = 40000$; $\overline{X} = 10000$; $\overline{XII} = 12000$.



Să rezolvăm: Mutați un chibrit, la fiecare din operațiile de mai jos, astfel încât să obțineți rezultate corecte:

a) $IV - I = VI$; b) $VII + I = V$;

c) $X + II = VII$; d) $IX + VII = I$;

e) $V + I + VI = I$; f) $X + II + II = IX$;

g) $X + III + V = XI$; h) $LX + XX = XC$;

Rezolvare:

a) $IV + I = V$; b) $VII - I = VI$;

c) $IX - II = VII$; d) $IX - VIII = I$;

e) $V + II - VI = I$; f) $IX - II + II = IX$;

g) $X - III + V = XII$; h) $LX - XX = XC$;

Exemplu: Numărul 25 are ca predecesor pe 24 și ca succesor pe 26.

○ Numerele naturale n și $n + 1$ se numesc **numere consecutive**.

○ Numărând din 2 în 2, pornind de la 0, obținem șirul **numerelor pare**:
0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; ...; 30; 32; ...; 100; 102; ...

○ În general un număr par este de forma $2 \cdot n$, unde n este număr natural.

○ Numerele pare au cifra unităților una din cifrele: 0; 2; 4; 6 sau 8.

○ Șirul numerelor naturale pare este tot **infinit**.

○ Numărând din 2 în 2, pornind de la 1, obținem șirul **numerelor naturale impare**:

1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; ...; 41; 43; 45; ...; 101; 103; 105; ...

○ În general un număr impar este de forma $2 \cdot n + 1$, unde n este număr natural.

○ Numerele din șirul numerelor naturale impare au cifra unităților 1, 3, 5, 7 sau 9.

○ Șirul numerelor naturale impare este tot **infinit**.

Să rezolvăm:

1. Victor, numărând din 2 în 2, a ajuns la numărul 384. De la care dintre următoarele numere a pornit: 157; 182; 179; 171.

Rezolvare: Victor a pornit de la 182, deoarece ajunge la un număr par.

2. Câte numere pare și câte numere impare se află între: a) 1 și 40; b) 3 și 52; c) 0 și 20.

Rezolvare: a) 19 pare și 19 impare; b) 24 pare și 24 impare; c) 9 pare și 10 impare.

3. Scrieți toate numerele pare de trei cifre distincte folosind cifrele: 0; 3; 4.

Rezolvare: 304; 430; 340.

4. Dintre patru numere naturale consecutive unul este 12. Care sunt celelalte numere?

Rezolvare: 12; 13; 14; 15 sau 11; 12; 13; 14 sau 10; 11; 12; 13 sau 9; 10; 11; 12.



EXERCIIU SI PROBLEME

1. Citiți numerele: 8 302 010; 300 405; 51 004; 10 340 505; 10 001.

(nota 5)

2. Scrieți cu cifre numerele formate din: a) 15 unități din clasa miilor și 127 unități din clasa unităților; b) 564 unități din clasa milioane, 19 unități din clasa miilor și 383 unități din clasa unităților.

(nota 5)

3. Scrieți cu cifre numerele care să fie egale cu: a) 3 unități de ordinul al 7-lea, 5 unități de ordinul al 5-lea, 4 unități de ordinul al 3-lea, o unitate de ordinul al 2-lea și 6 unități de ordinul 1; b) 3 unități de ordinul al 9-lea, 6 unități de ordinul al 8-lea, 2 unități de ordinul al 5-lea, 7 unități de ordinul al 4-lea și o unitate de ordinul al 3-lea.

(nota 5)

4. Scrieți cu cifre numerele: a) douăzeci și cinci; b) două sute cinci; c) două mii cinci; d) două sute de mii cinci; e) două milioane douăzeci de mii douăzeci și cinci.

(nota 5)

5. Scrieți cu cifre numerele: 41 milioane 14 mii 11; 1 milion 1 mie 1; 505 mii 550; 10 milioane 10 mii 10; 99 milioane 90 mii 9 sute; 857 milioane 117 mii 153; 100 milioane 100.

(nota 5)

6. Fie numărul 91 765. a) Plasați cifra 2 între două cifre pentru a putea obține cel mai mare număr; b) Plasați cifra 4 între două cifre pentru a obține cel mai mic număr.

(nota 5)

7. Scrieți numerele formate din sute, zeci și unități care au cifra sutelor egală cu cifra unităților.

(nota 5)

8. Găsiți numerele naturale formate din trei cifre care au cifra zecilor triplul numărului care reprezintă cifra unităților. (nota 7)

9. Găsiți numerele naturale de trei cifre în care cifra zecilor să reprezinte dublul cifrei unităților, iar cifra sutelor triplul cifrei unităților. (nota 7)

10. Care sunt numerele naturale formate din două cifre care se pot scrie cu cifrele: 2, 4, 7 și 9? (nota 7)

11. Aflați toate numerele naturale formate din trei cifre care se scriu utilizând cifrele 0, 1, 2. (nota 5)

12. Câte numere de trei cifre pot fi scrise cu cifrele 0, 4, 7? (nota 7)

13. a) Câte numere naturale de 5 cifre încep cu 384?

b) Câte numere naturale de 5 cifre se termină cu 384?

c) Scrieți toate numerele naturale de patru cifre cu suma cifrelor 3, apoi toate numerele naturale cu produsul cifrelor 12. (nota 7)

14. La numerotarea paginilor unei cărți cifra 0 a fost folosită de 39 de ori. Câte pagini are cartea? (nota 7)

15. Completați șirurile următoare cu încă patru numere, respectând regula de scriere a ordinii date: a) 1, 7, 3, 21, 5, 35, 7, ...; b) 1, 2, 3, 10, 20, 30, 4, 5, 6, 40, 50, 60, 7, ...; c) 40, 38, 20, 19, 36, 34, 18, 17, 32, ... (nota 9)

16. Se consideră două șiruri de numere:

1	2	3	...	2009	2010
↓	↓	↓		↓	↓
2010	2009	2008		2	1

Se observă că săgețile arată că lui 1 îi corespunde 2010, lui 2 îi corespunde 2009 ș.a.m.d. Cât îi corespunde lui 375? Dar lui 762? Dar lui 42? (nota 7)

17. a) Se dau două șiruri de numere:

13	15	17	19	21	23
↓	↓	↓	↓	↓	↓
91	12	32			

Completați al doilea șir cu numerele corespunzătoare.

b) Completează tabelul de mai jos, observând corespondența.

205	210	215		...	2025	2030	
5	10	15	20	...			1835
				...			

18. Se dau două șiruri de numere:

2	3	7	9	10	100
↓	↓	↓	↓	↓	↓
6	11	56			

Completați al doilea șir cu numerele corespunzătoare.

(nota 9)

19. a) Se dau două șiruri de numere:

1	3	5	7	9	11			2009	2011
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	4	6	8			24	30		

b)	1	2	3	8	10	100			
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	5	10	15				80	200	2010

Completați cele două șiruri cu numerele corespunzătoare. (nota 9)

20. Se consideră numărul: 43444546 ... 9899100101102 ... 998999.

a) Câte cifre are acest număr? b) Câte zerouri conține acest număr?

c) Câte cifre de 9 conține numărul dat? d) Care este cifra de pe locul 150? (nota 7)

21. a) Pentru numerotarea paginilor unui dicționar al limbii române s-au utilizat 3 289 de cifre. Câte pagini are dicționarul?

b) Câte cifre s-au utilizat pentru numerotarea unui dicționar ce conține 838 de pagini? (nota 9)

22. De câte ori utilizați cifra 0 pentru a scrie toate numerele naturale de trei cifre? Dar cifra 1? (nota 10)

23. Poetul Nicolae Labiș s-a născut în anul 1935 și a trăit 21 de ani. Scrieți cu cifre romane anul nașterii și cel în care a decedat poetul. (nota 10)

24. Scrieți cu cifre arabe următoarele numere scrise cu cifre romane:

a) XIV; II; V; VII; IV; X; XIII; XIV; XIX; XXVI; LXXX; XCVI;

b) XV; XVI; IX; XX; XXV; CXLIV; CCCLXX; DCCVII; MDIV; XVI; XXIX; XCVIII;

c) XXXIX; XLIC; C; CXL; XC; CIV; XD; MC; LVI; CLIV; CXLIX; DXIX;

d) VIII; XIII; XV; DXCV; CCCLXXX; XXXIX; DXCII; XCIX; CLXXIV; CIX; MDCCCXXVII; XCIV.

e) Câți ani a trăit Mihai Eminescu, dacă s-a născut în anul MDCCCL și a decedat în anul MDCCCLXXXIX? (nota 9)

25. Scrieți cu cifre romane numerele: a) 24, 45, 39, 67, 88, 951, 1230, 1359; b) 66, 99, 102, 401, 259, 316, 1983, 1907. (nota 10)

26. Numărul 345 se scrie: $3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$ iar numărul 10793 se scrie:

$1 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 3$. Scrieți la fel numerele: 48, 56, 173, 101, 931, 17321, 9876, 10731, 17321, 87532, 101279, 199998, 999899. (nota 7)

27. Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma:

a) $\overline{ab}$; b) $\overline{abc}$; c) $\overline{abcd}$; d) $\overline{aaa}$; e) $\overline{aa3b}$ și $a \neq b$; f) $\overline{abcd}$ și are cifre distincte. (nota 9)

28. Aflați toate numerele naturale știind că:

a) $a7 = 3b$; b) $x3y = y3x$; c) $\overline{abc} = \overline{cba}$. (nota 9)

29. Câte numere naturale de forma $\overline{abc}$ satisfac condiția $\overline{abc} = \overline{cba}$? ($\overline{cba}$ este răsturnatul lui $\overline{abc}$). (nota 9)

30. Determinați numerele naturale de forma $\overline{12a}$ care au suma cifrelor egală cu produsul acestora. (nota 9)

31. Fie numărul $a = 12345678910$.

a) Eliminați patru cifre din numărul a astfel ca numărul rămas să fie cel mai mic posibil.
b) Eliminați patru cifre din numărul a astfel ca numărul rămas să fie cel mai mare posibil. (nota 7)

32. Scrieți, cel mai mic și cel mai mare număr natural de șase cifre, folosind numai cifrele 0 și 4 în fiecare din situațiile următoare:

a) are numai trei cifre de 4;
b) are numai două cifre de 0. (nota 7)

33. Scrieți, toate numerele naturale cu cifre distincte între ele, de forma următoare și precizați câte astfel de numere există:

a) $\overline{189a345b}$; b) $\overline{21743a5b}$; c) $\overline{5a03491b}$; d) $\overline{7a20b451}$; e) $\overline{ab135674}$. (nota 7)

34. Determinați numerele naturale de forma $\overline{4ab}$ care îndeplinesc simultan condițiile:

a) $400 < \overline{4ab} \leq 497$; b) $a = 3b$. (nota 9)

35. Câte numere naturale de 5 cifre sunt egale cu răsturnatele lor? (răsturnatul numărului 349 este 943, a numărului 1376 este 6731, a numărului $\overline{abcd}$ este $\overline{dcba}$). (nota 10)

36. Arătați că există a, b, c, d, e , 5 numere naturale astfel încât:

a) $a + b + c + d + e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 12$.
b) $x + y + z + t + u + v + w = 12$. (nota 10)

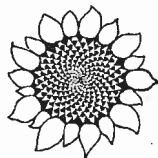
37. Aflați toate numerele naturale de patru cifre știind că fiecare dintre ele are cifrele distincte, scrise în ordine crescătoare, iar suma cifrelor este 18. (nota 10)

38. Să se găsească cel mai mic număr natural care are suma cifrelor egală cu 2012. (nota 10)

39. Aflați câte numere naturale cuprinse între 1 și 1000000 au suma cifrelor 3. (nota 10)

40. Ce numere lipsesc din căsuțe în șirul lui Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, , , , , ... (nota 7)



41. Scrieți, câte patru numere naturale pare consecutive cuprinse între:

a) 105 și 120; b) 2000 și 2012; c) 4780 și 4798; d) 2012 și 2030. (nota 7)

42. a) Scrieți cel mai mic număr natural par de trei cifre.

b) Scrieți cel mai mare număr natural par de 4 cifre.

c) Scrieți cel mai mic număr par de trei cifre distincte.

d) Scrieți cel mai mare număr par de 5 cifre distincte. (nota 7)

43. Scrieți toate numerele naturale impare ale căror cifre distincte sunt:

a) 1, 0, 2; b) 1, 0, 2, 3; c) 1, 2, 4, 9; d) 4, 6, 7, 9; e); f) 1, 2, 0, 4. (nota 9)

44. Stabiliți paritatea sumei (pară sau impară):

a) a 4 numere pare; d) a 13 numere impare;
b) a 4 numere impare; e) a 2011 numere impare;
c) a 17 numere pare; f) a 2012 numere impare. (nota 9)

45. Aflați cel mai mic număr de 10 cifre ce poate fi obținut scriind unul după altul următoarele 6 numere, nu neapărat în această ordine: 509; 61; 8; 7; 43; 2. (nota 7)

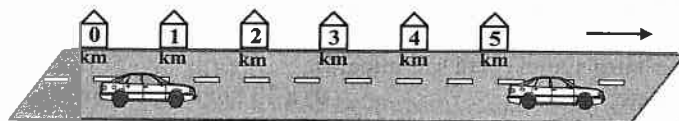
46. Toate numerele naturale de 4 cifre, având suma cifrelor 5, sunt scrise în ordine descrescătoare. Pe al câtelea loc în șir este situat numărul 2012? (nota 9)

47. **Problemă aplicativă.** Elena s-a aflat pe poziția 20 pe lista Concursului „Dimitrie Pompeiu”, numărate atât în ordine crescătoare cât și ordinea descrescătoare a punctajelor afișate ale comisiei concursului. Câți participanți au fost la concurs? (nota 7)

48. De câte ori apare cifra 3 când numerotăm cele 980 de pagini ale unei cărți? (nota 9)

I.2. Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor. Compararea, aproximarea și ordonarea numerelor naturale. Probleme de estimare

Să observăm:

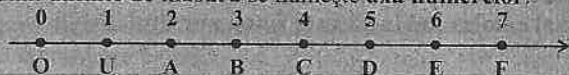


- Mașina se deplasează de la borna 0 pe o șosea dreaptă întâlnind bornele marcate cu 1 km; 2 km; 3 km; ...
- Fiecare bornă indică distanța parcursă de mașina care a pornit de la borna marcată cu 0.



Rețineți!

- dreaptă pe care fixăm un punct O , numit **origine**, un **sens pozitiv** (reprezentat prin $\rightarrow$) și un **segment OU numit unitate de măsură** se numește **axa numerelor**.



De exemplu, lui 3 îi corespunde punctul B , notăm $B(3)$ și spunem că B are coordonata 3.

- Unui punct de pe axa numerelor îi asociem numărul care reprezintă distanța de la acel punct la originea ei astfel încât:
 - Originii O a axei îi asociem numărul 0.
 - Punctului U situat la distanța de o unitate față de origine, în sensul considerat, îi asociem numărul 1.
 - Punctului B situat la distanța 3 unități față de origine, în sensul considerat, îi asociem numărul 3 (coordanata 3) etc.

Notăm:
 $B(3)$

Citim:
Punctul B are coordonata 3

- Orice număr natural este coordonata unui punct situat pe axa numerelor, în sensul fixat, la o distanță față de origine egală cu acel număr.



Cum comparăm numerele naturale?

Să recapitulăm:

$35012 > 9314$, pentru că 35012 are cinci cifre, iar 9314 are patru cifre. $174612 > 174539$ pentru că primele trei cifre coincid, iar $6 > 5$.

În concluzie:

Dintre două numere naturale a și b , dacă a are mai multe cifre decât b , atunci a este mai mare decât b .

Notăm: $a > b$ sau $b < a$.

Pentru a compara numerele naturale a și b care au același număr de cifre, comparăm pe rând cifrele fiecărui ordin, începând din stânga. Este mai mare numărul care are prima cifră întâlnită mai mare.

Ce relații există între două numere naturale?

Notăm	Citim	Exemple
$=$	egal	$7 = 7$; $9 = 9$
$\neq$	diferit	$8 \neq 10$; $9 \neq 0$
$<$	strict mai mic	$8 < 12$; $7 < 121$
$\leq$	mai mic sau egal	$3 \leq 7$; $5 \leq 5$
$>$	strict mai mare	$9 > 6$; $3 > 1$
$\geq$	mai mare sau egal	$7 \geq 5$; $2 \geq 2$

Observație:

Numărul nenul este un număr mai mare decât zero.

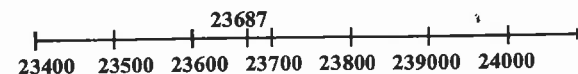


Cum aproximăm numerele naturale?

Observăm și reținem!

Victor are 23687 lei. Spunem că Victor are aproximativ 24000 lei

- În anumite situații nu este necesar să știm toate cifrele unui număr. Pentru aceasta folosim aproximarea lor prin lipsă sau prin adaos.

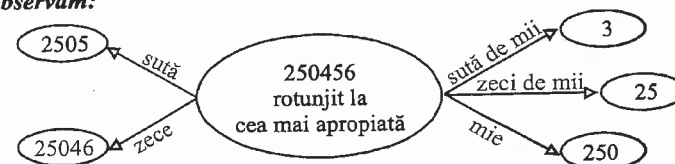


- Numărul 23687 poate fi aproximat la:

- ordinul zecilor prin adaos cu 23690;
- ordinul sutelor prin adaos cu 23700;
- ordinul miilor prin adaos cu 24000;
- ordinul zecilor prin lipsă cu 23680;
- ordinul sutelor prin lipsă cu 23600;
- ordinul miilor prin lipsă cu 23000.



Să observăm:



Cum rotunjim numerele naturale?

Rotunjim la ordinul:

- zecilor prin adaos când cifra unităților este cel puțin egală cu 5;
- sutelor prin adaos când cifra zecilor este cel puțin egală cu 5;
- miilor prin lipsă când cifra sutelor este mai mică decât 5;
- zecilor de mii prin lipsă când cifra miilor este mai mică decât 5;
- sutelor de mii prin adaos când cifra zecilor de mii este cel puțin egală cu 5 etc.

Exemple:

- Numărul 73812 poate fi rotunjit la ordinul:
 - sutelor, prin lipsă cu 73800;
 - miilor, prin adaos cu 74000;
 - zecilor, prin lipsă cu 73810.
- Numărul 85553 poate fi rotunjit prin adaos:
 - la ordinul sutelor cu 85600 și la ordinul miilor cu 86000.



În concluzie:

Aproximarea prin lipsă până la zeci, sute, mii etc. este cel mai mare număr natural, mai mic sau cel mult egal cu numărul respectiv format numai din zeci, sute, mii etc.

Aproximarea prin adaos până la zeci, sute, mii etc. este cel mai mic număr natural, mai mare sau egal cu numărul respectiv format din zeci, sute, mii etc.

Rotunjirea până la zeci, sute, mii etc. este aproximarea prin lipsă sau prin adaos până la zeci, sute, mii etc., la cea mai apropiată de numărul respectiv.

Exemple:

Numărul	Aproximări prin lipsă	Aproximări prin adaos	Aproximări prin rotunjire	Aproximarea se face la nivelul
350783	350780	350790	350780	zecilor
401352	401300	401400	401400	sutelor
472572	472000	473000	473000	miilor
453570	450000	460000	450000	zecilor de mii

EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Reprezentați pe axă numerele: **a)** 2; 3; 5; 7; **b)** 0; 4; 6; 8; 10; **c)** 1; 3; 5; 7; 9; 10; **d)** 0; 2; 5; 11; 12. (nota 5)

2. Reprezentați pe axa numerelor punctele: $A(3)$; $B(1)$, $C(7)$; $D(2)$; $O(0)$; $E(4)$; $F(8)$; $G(11)$; $H(5)$; $I(6)$. (nota 5)

3. Fie punctele $A(7)$, $B(3)$, $C(2)$, $D(1)$, $E(10)$. Stabiliți ordinea punctelor pe axa numerelor. (nota 5)

4. Reprezentați pe axa numerelor punctele ale căror coordonate sunt numere naturale care satisfac una din condițiile:

a) sunt cuprinse între 3 și 9;

b) sunt cel mult egale cu 5;

c) sunt cel puțin egale cu 4 și cel mult egale cu 9;

d) Ne imaginăm o axă pe care sunt montate spoturi din unitate în unitate, spoturi care la atingere se colorează în roșu. Un iepuraș începe din origine cu un salt înainte lung de 4 unități, apoi în continuare unul de 3 unități, după care se întoarce și face două salturi în sens invers, unul cu lungimea de 2 unități, iar celălalt de 3 unități. Precizați coordonatele spoturilor care se colorează. (nota 7)

5. Aflați:

a) Câte puncte au coordonatele numere naturale pare mai mici decât 25.

b) Câte puncte au coordonatele numere naturale impare mai mici decât 29.

c) Punctul A are coordonata 200, iar B are coordonata 300. Câte puncte situate pe axă între A și B au coordonatele numere naturale impare? Dar pare? (nota 7)

6. Pe axa numerelor, coordonata punctului A este 2, iar coordonata punctului B este 12. Aflați coordonata punctului M știind că M se află la distanțe egale de A și B . (nota 7)

7. Câte puncte de coordonate naturale există pe axa numerelor între punctul de coordonată 1000 și punctul de coordonată 2012? (nota 7)

8. Comparați următoarele numere: **a)** 123 cu 321; **b)** 1234 cu 423; **c)** 1112 cu 2111; **d)** 6565 cu 6555; **e)** 6336 cu 2112 · 3; **f)** 126 664 cu 6 332 · 2; **g)** $\overbrace{12333}^{n \text{ cifre}} \dots 36$ cu

$\underbrace{4111}_{n \text{ cifre}} \dots 12 \cdot 3$.

(nota 5)

9. Comparați numerele: **a)** 418 000 și 1 230; 7 615 323 și 1 845 730; 84 312 500 și 85 312 500; **b)** 412 000 și 142 000; 215 378 și 215 378; 75 496 și 57 946. (nota 5)

10. Scrieți în ordine crescătoare numerele: 91, 345, 72, 131, 12, 981, 1034, 1021, 93. (nota 5)

11. Scrieți în ordine descrescătoare numerele: 312, 89, 712, 1031, 2039, 12, 191, 93, 739, 1319. (nota 5)

12. Scrieți cel mai mare și cel mai mic număr de 3 cifre care are:

a) cifre distincte nenule; **b)** care nu conțin cifrele 1 și 9; **c)** care nu conțin nici o cifră pară; **d)** cu produsul cifrelor 21; **e)** două cifre pare distincte și o cifră impară. (nota 7)

13. **a)** Scrieți 3 numere naturale consecutive mai mici decât 4. Câte posibilități sunt?

b) Scrieți 2 numere pare consecutive mai mici decât 9. Câte posibilități sunt? (nota 5)

14. Scrieți cel mai mare și apoi cel mai mic număr natural de 6 cifre, folosind cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, fără ca acestea să se repete în scrierea numărului respectiv. (nota 7)

15. Aflați: **a)** cel mai mic număr natural mai mare decât cel mai mare număr natural de zece cifre; **b)** cel mai mare număr natural mai mic decât cel mai mic număr natural format din zece cifre diferite. (nota 7)

16. Care este cel mai mare număr de 6 cifre, în care cifrele nu se repetă? Dar cel mai mic? (nota 5)

17. **a)** Care este cel mai mic număr natural de 9 cifre care are exact trei cifre identice? **b)** Dar cel mai mare? (nota 7)

18. Care este cel mai mic număr natural de 7 cifre care are exact patru cifre egale? Dar cel mai mare? (nota 7)

19. Găsiți numerele naturale mai mari decât 70 și mai mici decât 100 care au cifra unităților mai mare decât cifra zecilor. (nota 5)

20. Găsiți numerele naturale cuprinse între 450 și 500 cu: **a)** cifra unităților 5; **b)** cifra zecilor 5; **c)** diferența dintre cifra unităților și cifra sutelor 5. (nota 5)

21. Folosind cifrele 2, 5, 1, 0, 6 doar o singură dată scrieți: **a)** cel mai mare număr posibil; **b)** cel mai mic număr posibil; **c)** toate numerele de două cifre distincte care se pot forma cu aceste cifre. (nota 5)

22. Scrieți în ordine crescătoare apoi descrescătoare, numerele de două cifre, care au suma dintre cifra zecilor și cifra unităților egală cu 5. (nota 5)

23. Scrieți cel mai mare număr de 5 cifre care să nu fie mai mare decât 56 666 și să nu aibă cifre care să se repete. (nota 5)

24. Scrieți cel mai mare număr de 6 cifre care să nu fie mai mare decât 455 555 și să nu aibă cifre care să se repete. (nota 5)
25. Se dau următoarele perechi de numere: a) $\overline{104a5}$ și $\overline{104b3}$; b) $\overline{m2301}$ și $\overline{n2301}$; c) $\overline{21e5}$ și $\overline{213c}$. Înlocuiți literele din componența acestor perechi de numere, cu cifre, astfel ca: 1) primele numere din fiecare pereche să fie mai mari; 2) primele numere din fiecare pereche să fie mai mici; 3) pot fi numerele din fiecare pereche egale? (nota 7)
26. Aflați cel mai mare număr natural de patru cifre care satisface următoarele condiții: a) este mai mic decât 2 000; b) are suma cifrelor mai mică sau egală cu 26. (nota 7)
27. Aflați cel mai mic număr natural de patru cifre care îndeplinește simultan următoarele condiții: a) cifrele sunt distincte; b) este mai mare ca 3 000; c) are suma cifrelor strict mai mare ca 12. (nota 7)
28. Să se determine cel mai mare număr de cinci cifre, știind că: a) este cuprins între 20 000 și 27 600; b) nu conține cifrele 9 și 8; c) cifra 5 se repetă de 2 ori. (nota 7)
29. Aflați cel mai mare număr natural de șase cifre care satisface următoarele condiții: (a) are cifrele diferite; (b) este mai mic decât 170 000; (c) are suma cifrelor mai mică sau egală cu 27. (nota 9)
30. Să se determine cel mai mare număr natural de cinci cifre cu proprietatea că primele două cifre sunt pare, a treia este impară, iar ultimele două cifre au suma egală cu 10. (nota 10)
31. Determinați cel mai mare număr natural de patru cifre distincte, știind că cifra zecilor este egală cu suma dintre cifra miilor și cifra sutelor. (nota 7)
32. Aflați cel mai mic număr natural mai mare decât cel mai mare număr natural de cinci cifre și cel mai mare număr natural mai mic decât cel mai mic număr natural format din cinci cifre diferite. (nota 9)
33. Determinați numerele naturale de forma $\overline{1xy}$ care îndeplinesc simultan condițiile: a) $100 < \overline{1xy} < 140$; b) $y = x + 3$. (nota 10)
34. Pentru fiecare din numerele: 17342; 23500; 38272; 4932; 513429 scrieți: a) aproximarea prin lipsă până la: zeci, sute, mii; b) aproximarea prin adaos până la: zeci, sute, mii; c) rotunjirea până la: zeci, sute, mii. (nota 7)
35. Aflați toate numerele naturale care prin rotunjire la zeci dă rezultatul 2390. (nota 5)
36. Aflați toate numerele naturale care prin rotunjire la zeci dă rezultatul 5480. (nota 7)
37. a) Câte numere naturale dau prin rotunjire la sute rezultatul 2300? b) Dar rezultatul 2400? (nota 7)
38. **Problemă aplicativă.** Completați spațiile punctate rotunjind până la mii numărul spectatorilor la un meci de fotbal de pe stadionul National-Arena, s-a obținut 54000. Atunci pe stadion sunt cel puțin spectatori și cel mult spectatori. (nota 7)

39. **Problemă aplicativă.** În tabelul de mai jos sunt indicate suprafețele câtorva state europene, membre U.E. Rotunjiți până la sute suprafețele respective. (nota 7)

Denumirea țării	Suprafața (km ²)
Austria	83858
Belgia	30510
Bulgaria	110910
Danemarca	43094
Finlanda	337030
Germania	357021
Letonia	64589
Malta	316
Polonia	312685
România	237500
Spania	504782
Ungaria	93030

40. **Problemă aplicativă.** Tabelul de mai jos indică distanțele în kilometri dintre unele orașe din Europa. Stabiliți aproximările prin lipsă, adaos și rotunjire până la zeci și sute între București și orașele din tabel, apoi distanțele dintre oricare două orașe din tabel. (nota 7)

	București	Amsterdam	Atena	Berlin	Londra	Paris
București	—	2529	1444	1903	3189	2550
Amsterdam	2529	—	3027	664	418	558
Atena	1444	2915	—	2357	3298	2686
Berlin	1903	664	2357	—	1025	1076
Londra	3189	418	3298	1025	—	419
Paris	2550	558	2686	1076	419	—

41. **Problemă aplicativă.** Tabelul de mai jos indică distanțele în kilometri dintre unele orașe ale României pe calea ferată. Stabiliți aproximările prin lipsă, adaos și rotunjire până la zeci și sute între București și orașele nominalizate, apoi distanțele între oricare două orașe din tabel. (nota 7)

	București	Arad	Brașov	Constanța	Iași	Oradea	Suceava	Timișoara
București	—	546	166	225	399	651	447	533
Arad	546	—	433	817	737	121	599	59
Brașov	166	433	—	380	459	433	457	450
Constanța	225	817	380	—	428	799	585	758
Iași	399	737	459	428	—	614	143	732
Oradea	651	121	484	844	614	—	585	168
Suceava	447	599	457	505	143	481	—	667
Timișoara	533	59	450	758	732	168	667	—

42. Care număr se află exact la jumătatea distanței dintre numerele 2012 și 1004, pe axa numerelor? (nota 7)

Operații cu numere naturale

I.3. Adunarea numerelor naturale; proprietăți



Să recapitulăm:

Victor are 675 lei, iar Ana are 528 lei. Ce sumă au împreună cei doi copii?

Rezolvare:

$$\begin{array}{r} 675 + \\ 528 \\ \hline 1203 \end{array}$$

→ s-au adunat unitățile: $5 + 8 = 13$ (o zece și 3 unități);

→ s-au adunat zecile: $2 + 7 + 1 = 10$ (o sută);

→ s-au adunat sutele: $5 + 6 + 1 = 12$.

La trei ferme pomicole s-au sădit: 1352 puiți de măr, 1768 puiți de păr și 978 puiți de prun. Câți puiți s-au sădit în total?

$$\begin{array}{r} 1352 + \\ 1768 \\ 978 \\ \hline 4098 \end{array}$$

→ $8 + 8 + 2 = 18$;

→ $7 + 6 + 5 + 1 = 19$;

→ $9 + 7 + 3 + 1 = 20$;

→ $1 + 1 + 2 = 4$.

Clasa milioaneilor			Clasa miilor			Clasa unităților		
u	s	z	u	s	z	u	s	z
	7	2	0	3	5	8		
	2	6	8	4	3	1		
	9	8	8	7	8	9		

Clasa milioaneilor			Clasa miilor			Clasa unităților		
u	s	z	u	s	z	u	s	z
	4	5	9	1	3	8		
	6	1	0	3	7	5		
1	0	6	9	5	1	3		

$$720358 + 268431 = 988789$$

$$\begin{array}{r} 720358 + \\ 268431 \\ \hline 988789 \end{array}$$

$$459138 + 610375 = 1069513$$

$$\begin{array}{r} 459138 + \\ 610375 \\ \hline 1069513 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 28 + 45 = 73 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \uparrow \\ \text{termeni} \quad \text{sumă} \end{array}$$

Proprietățile adunării numerelor naturale



Un automobilist pleacă din Bistrița spre București, prin Brașov.

Un motociclist pleacă din București spre Bistrița, tot prin Brașov.

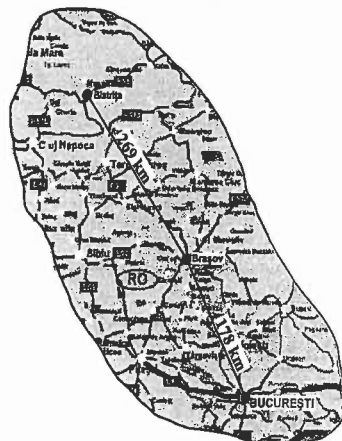
a) Ce distanță parcurge automobilistul de la Bistrița la București?

b) Ce distanță parcurge motociclistul de la București la Bistrița?

Rezolvare:

a) $260 \text{ km} + 178 \text{ km} = 438 \text{ km}$

b) $178 \text{ km} + 260 \text{ km} = 438 \text{ km}$



În concluzie: $260 + 178 = 178 + 260$.

↑ ↑ ↑ ↑

Adunarea este comutativă.

În general: $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a și b .



Victor a cheltuit într-o excursie de trei zile suma primită de la mama sa astfel: în prima zi 25 de lei, a doua zi 40 de lei, iar a treia zi 30 de lei.

a) Ce sumă a cheltuit Victor în primele două zile? Dar în ultimele două zile?

b) Calculați în două moduri suma cheltuită de Victor în excursie.

Rezolvare:

a) În primele două zile Victor a cheltuit: 25 lei + 40 lei = 65 lei.

În ultimele două zile Victor a cheltuit: 40 lei + 30 lei = 70 lei.

b) Suma cheltuită este egală cu: (25 lei + 40 lei) + 30 lei = 95 lei sau
25 lei + (40 lei + 30 lei) = 95 lei.

În concluzie: $(25 + 40) + 30 = 25 + (40 + 30)$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

În general: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a , b și c .

Adunarea este asociativă.



O vânzătoare preia într-o zi de la furnizori legume și fructe conform facturii alăturate.

a) Câte kg de legume a preluat vânzătoarea?

b) Câte kg de fructe a preluat vânzătoarea?

Rezolvare:

a) $55 \text{ kg} + 0 \text{ kg} = 55 \text{ kg}$;

b) $72 \text{ kg} + 58 \text{ kg} + 0 \text{ kg} + 25 \text{ kg} = 155 \text{ kg}$.

În concluzie: $55 + 0 = 55$

↑ ↑

În general: $a + 0 = a$, oricare ar fi numărul natural a

Zero este elementul neutru pentru adunarea numerelor naturale.

Să utilizăm proprietățile adunării pentru calcule rapide:

Exemple

Calculați cât mai rapid:

a) $2345 + 1572$;

b) $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$;

Rezolvare

a) $2345 + 1572 = (2300 + 45) + (1500 + 32) = (2300 + 1500) + (45 + 32) = 3800 + 77 = 3877$.

b) $1 + 2 + 3 + \dots + 50 + 51 + \dots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (49 + 50) + (50 + 51) = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 101 \cdot 50 = 5050$.

50 termeni

c) $1 + 2 + 3 + \dots + 48 + 49 + 50 + 51$.

(Suma lui Gauss)



Observație:

În rezolvarea exercițiilor am aplicat **asociativitatea adunării** numerelor naturale.

c) $1 + 2 + 3 + \dots + 25 + 26 + \dots + 48 + 49 + 50 + 51 =$

$$= (1 + 50) + (2 + 49) + (3 + 48) + \dots + (25 + 26) + 51 =$$

$$= \underbrace{51 + 51 + 51 + \dots + 51 + 51}_{26 \text{ termeni}} = 51 \cdot 26 = 1326.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Aflați suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr de șase cifre știind că cifrele fiecărui număr sunt distincte. (nota 5)

2. a) Aflați suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr de cinci cifre.

b) Aceeași problemă pentru un număr de 7 cifre și de 10 cifre. (nota 5)

3. Calculați:

a) $3456 + 175$;

e) $7832 + 1893$;

i) $315782 + 49234 + 68421$;

b) $372 + 893$;

f) $3456 + 1729$;

j) $491 + 321 + 121 + 16$;

c) $5304 + 1452$;

g) $482 + 17521$;

k) $2539 + 3127 + 4135 + 19$;

d) $4532 + 189$;

h) $7803 + 19345$;

l) $798 + 1034 + 79 + 1452$.

(nota 5)

4. **PĂTRATE MAGICE.** Completați căsuțele libere ale pătratelor cu numere naturale, astfel încât suma numerelor din fiecare linie, din fiecare coloană și din fiecare diagonală să fie aceeași.

(nota 7)

4		8
14		
12		

	9	
6		8

16	2	3	13
	11	10	
5			16
4			

5. a) Scrieți numărul 11 ca sumă de două numere naturale. Găsiți toate soluțiile.

b) Scrieți numărul 178 ca sumă de două numere naturale, apoi de trei numere naturale. (nota 7)

6. Scrieți numărul 45 ca sumă de 5 numere naturale care conțin numai cifra 3. (nota 9)

7. Completați tabloul.

(nota 7)

x	210	1321	491	112345	18753	15672
y	351	579	3142	5747	4635	1235
x + 423						
x + y						

8. Calculați, utilizând proprietățile adunării:

a) $25 + 73 + 75 + 27$;

f) $1 + 3 + 5 + 12 + 14 + 16$;

b) $5839 + 7459 + 161$;

g) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 50$;

c) $121 + 25 + 29 + 75$;

h) $2 + 4 + 6 + \dots + 60$;

d) $39 + 45 + 37 + 55 + 61 + 63$;

i) $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 99$;

e) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10$;

j) $5 + 10 + 15 + \dots + 2005$.

(nota 7)

9. **Problemă aplicativă.** O societate comercială a încasat într-o zi suma de 35435502 lei, iar a doua zi cu 13579347 lei mai mult.

a) Ce sumă a încasat în cele două zile?

b) Aproximați prin lipsă la zeci de mii suma încasată.

c) Rotunjiți la mii suma încasată.

(nota 7)

10. Calculați: a) $23\,456 + 876\,543$; b) $1\,997 + 19\,997 + 19\,791$;

c) $10 + 100 + 1\,000 + \dots + 1\,000\,000\,000$.

a) (nota 5); b) (nota 7); c) (nota 10)

11. Să se reconstituie adunarea următoare, unde cuvintele sunt numere naturale în baza 10:

$$\begin{array}{r} \text{TOMIS} + \\ \text{OMIS} + \\ \text{MIS} + \\ \text{IS} + \\ \hline \text{S} \\ \text{COMIS}. \end{array}$$

(nota 9)

12. Reconstituiți adunările:

a) DOGARI +

OGARI +

GARI +

ARI +

RI +

I

5 0 1 4 9 2 ;

b) LUNA +

UNA +

NA +

A

1 9 9 6 .

(nota 7)

13. Înlocuiește literele cu cifre: a) TATA+ b) SUC+

ATA

UC

TA

C

A

PUC .

3068 ;

(nota 9)

14. Mutați un singur bețișor astfel încât următoarea egalitate să fie adevărată: VIII + I = XI.

(nota 9)

15. Adunând de trei ori cifra 8 se obține 24. Găsiți o altă cifră care repetată de trei ori în adunare să dea tot 24. (nota 7)

16. Cu ce numere trebuie completate spațiile libere?

7	8
10	11

8	9
12	13

4	3
	5

4	1
7	

(nota 7)

17. Cu ce număr trebuie completat spațiul liber?

2	
3	7
	8

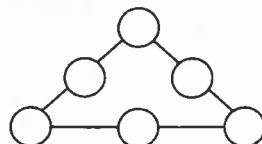
6	
7	4
	5

2	
3	5
	6

7	
8	
	5

(nota 7)

18. Așază în cele 6 cerceulețe din figura alăturată numere naturale de la 100 la 105, astfel încât să obții aceeași sumă pe fiecare din cele 3 laturi. (nota 7)



19. Cât fac unu și cu altul și cu trei legat de patru?

(nota 7)

20. Primele două perechi de numere sunt alcătuite după o anumită regulă. Completați cea de a treia pereche de numere, având în vedere aceeași regulă.

a) (12,10); (5,24); (40,...); b) (23,27); (49,1); (43,...).

(nota 7)

21. Completați locul liber din diagrama:

13	24	36		63	78	94.
----	----	----	--	----	----	-----

(nota 5)

22. Calculați suma tuturor numerelor naturale de trei cifre distincte fiecare, care se pot scrie cu cifrele: a) 2, 4 și 6; b) 1, 2, 4 și 0; c) 0, 5, 6, 8.

(nota 9)

23. Dacă $x + 5 = 12$, aflați: a) $x + 6$; b) $10 + x + 5$; c) $x + 40$; d) $x + x + 12$.

(nota 7)

24. a) Suma a 6 numere naturale distincte este 23. Aflați numerele.

b) Suma a 6 numere naturale distincte este 29. Aflați numerele.

c) Suma a 7 numere naturale distincte este 35. Aflați numerele.

(nota 9)

25. Scrieți numărul 25 ca o sumă de numere naturale consecutive.

(nota 9)

26. Despre Karl Gauss, cel mai mare matematician german, se povestește că fiind în școala primară, într-o zi învățătorul a cerut elevilor să calculeze suma tuturor numerelor naturale de la 1 până la 100 inclusiv, sperând să-i țină cât mai mult ocupați. Spre surprinderea lui, micul Gauss a terminat foarte repede. Cum a procedat?(nota 10)

27. Aflați numerele de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} + \overline{ba} = 110$.

28. Aflați numărul: a) cu 285 mai mare decât 4578; b) cu 3583 mai mare decât 7859.

(nota 5)

29. **Problemă aplicativă.** Ana și Miruna au câte un coș cu nuci. În coșul Anei sunt 487 de nuci iar în coșul Mirunei sunt cu 148 mai multe nuci. Câte nuci are Miruna în coș? Câte nuci au împreună cele două fete?

(nota 7)

30. **Problemă aplicativă.** Într-o fermă sunt oi, vaci și iepuri: 2500 vaci, oi cu 150 mai multe decât vaci, iar iepuri cu 80 mai mulți decât vaci și oi la un loc. Câți iepuri sunt la fermă?

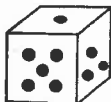
(nota 9)

31. **Problemă aplicativă.** În rada unui port sosesc în prima săptămână 473 de vapoare, a doua săptămână 658 de vapoare, în a treia săptămână cu 106 mai multe decât în a doua săptămână, iar în a patra săptămână cât în primele două la un loc. Câte vapoare au sosit în radă în cele patru săptămâni?

(nota 9)

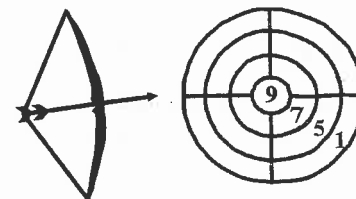
32. Câte posibilități sunt ca, la aruncarea unui zar, să apară un număr par? Dar unul impar? Comparați șansele în ambele cazuri.

(nota 7)



33. **Problemă aplicativă.** Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 49. Se scoate fără a ne uita în urnă o bilă. Câte posibilități există încât să se extragă o bilă pe care este scris un număr impar? Dar un număr par? Comparați șansele în cele două cazuri.

(nota 7)



34. **Problemă aplicativă.** În câte moduri poate obține Victor 28 de puncte din 4 trageri la țintă cu arcul?

(nota 7)

35. **Problemă aplicativă.** Victor calculează suma cifrelor pe care le afișează ceasul lui digital (de exemplu la ora 15:29 el obține 17). Care este suma maximă a cifrelor pe care o poate obține Victor?

(nota 9)

36. Un grup vocal cu 6 copii are suma vârstelor membrilor 40 ani. Știind că vârstele lor sunt reprezentate de numerele naturale începând cu 5 și terminând cu 8, precizați cum anume sunt repartizate aceste vârste pe membri grupului vocal. Indicați toate variantele posibile.

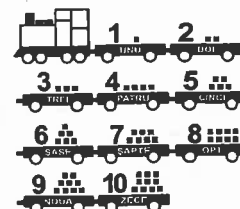


(nota 9)

37. Andrei, Victor și Codruț aflați în curtea bunicii, încep un joc cu reguli stabilite de comun acord. După ce se dă startul, exact în ordinea în care i-am pomenit, vor intra în casă, pe rând câte unul, la interval de 22 minute și vor calcula suma cifrelor din ora afișată de ceasul mare electronic (cu schimbare la 24 ore). Vor încheia jocul la ora 13.30 când intră toți la masă. Câștigă două porții din desert cel care obține rezultatul cel mai mare. Dacă startul s-a dat la ora 8.00, aflați care dintre copii a fost „norocos“?

(nota 9)

38. Pentru a-și ajuta fiul cel mic să calculeze sume mai ușor, un tată ingenios îi cumpără un trenuleț al numerelor cu 10 vagoane. Fiecare vagon-platformă e numerotat și este încărcat cu cubulețe exact cât indică numărul vagonului (figura alăturată). Mai întâi îi dă să calculeze câte cubulețe sunt încărcate în acest trenuleț. Apoi folosind trenulețul și suma calculată, să determine ce încărcătură va avea trenulețul dacă în fiecare vagon se adaugă câte 10 cubulețe. Dar dacă fiecare cubuleț ar fi înlocuit cu câte un balot de 15 cubulețe?



(nota 10)

I.4. Scăderea numerelor naturale



Să recapitulăm:

La un depozit de fructe s-au adus 4759 kg de prune și 2517 kg de mere. S-au distribuit spre vânzare 2543 kg de prune și 763 kg de mere. Ce cantități de prune și de mere au rămas în depozit?

Rezolvare:

$$4759 -$$

$$\underline{2543}$$

$$2216$$

- s-au scăzut unitățile $9 - 3 = 6$;
- s-au scăzut zecile $5 - 4 = 1$;
- s-au scăzut sutele $7 - 5 = 2$;
- s-au scăzut miile $4 - 2 = 2$.

$$2517 -$$

$$\underline{763}$$

$$1754$$

- s-au scăzut unitățile $7 - 3 = 4$;
- $1 - 6$ nu se poate efectua!
• se ia o sută din cele 5 și se transformă în 10 zeci, iar cifra zecilor este egală cu $11 - 6 = 5$;
- $4 - 7$ nu se poate efectua!
• se ia o mie din cele două și se transformă în 10 sute, iar cifra sutelor este egală cu $14 - 7 = 7$;
- cifra miilor ($2 - 1 = 1$).



Să ne amintim:

$$35 - 18 = 17 \leftarrow \text{diferență}$$

descăzut scăzător

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
u	s	z	u	s	z	u	s	z
	8	4	5	2	1	3		
	3	7	2	8	0	5		
	4	7	2	4	0	8		

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
u	s	z	u	s	z	u	s	z
3	0	0	0	0	0	0		
	7	8	4	0	1	8		
2	2	1	5	9	8	2		



Să observăm:

Victor are 350 lei, iar Andrei 285 lei.
Ei dau banii mamei lor ca să-i păstreze.
Ce suma a primit mama de la cei doi copii?

Rezolvare:

$$350 \text{ lei} + 285 \text{ lei} = 635 \text{ lei.}$$

Mama are 635 lei, din care îi dă lui Victor 350 lei, ceilalți bani păstrându-i pentru Andrei. Ce sumă va primi Andrei?

Rezolvare:

$$635 \text{ lei} - 350 \text{ lei} = 285 \text{ lei.}$$

$$350 + 285 = 635$$

$$285 = 635 - 350$$

$$350 = 635 - 285$$

În general:

$$a + b = c$$

$$b = a - c$$

$$a = c - b$$

Concluzie: ➤ Scăderea este operația inversă adunării.

➤ Proba adunării se face prin adunare sau prin scădere.

Cum aflăm termenul necunoscut?

Rezolvare:

$$a + 357 = 785;$$

$$a = 785 - 357 = 428;$$

$$b - 384 = 215;$$

$$b = 215 + 384 = 599;$$

$$845 - c = 456.$$

$$c = 845 - 456 = 389.$$

EXERCII ȘI PROBLEME

1. Calculați, apoi faceți proba:

a) $758 - 235$;

e) $723662 - 4715$;

i) $350122 + 19989$;

b) $15709 - 4253$;

f) $137504 - 23857$;

j) $9463229 + 981215$;

c) $2009 - 1578$;

g) $754392 - 65404$;

k) $576123 - 37805$;

d) $1763 - 351$;

h) $489564 + 510436$;

l) $28531 - 19643$. (nota 5)

2. Verificați egalitățile: a) $2131 + 245 = 5437 - 3061$; b) $15 + (13 + 21) = 75 - 26$;

c) $203 + 25 + 13 = 105 + 89 - 3$.

a) - (nota 5); b) și c) - (nota 7)

3. Calculați:

a) $3057 - 2137$;

e) $30712 - 15613 - 317 + 148$;

b) $37501 - 28613$;

f) $45213 + 1232 - 4567$;

c) $14702 - 3125 - 2703$;

g) $17132 - 5342 - 4015$;

d) $4872 + 13145 - 979$;

h) $28372 + 17012 - 13143$.

(nota 7)

4. Completați tabelul următor:

a	267	3012		7145	12003	
b	142	1756	4073			
a - b			2569	3807	7592	11707
a - 98						18459

5. a) Scăzătorul este egal cu 137502, iar diferența este 13452. Care este descăzutul?

b) Descăzutul este 13452 și diferența este 7802. Care este scăzătorul? (nota 7)

6. Se dau numerele $a = 2347$; $b = 2003$; $c = 792$; $d = 27$. Calculați:

a) $a + b + c + d$; b) $a + b - c - d$; c) $b - c + d$; d) $a - d - c + b$;

e) $(a + b) - (c + d)$; f) $(b + c + d) - a$.

(nota 7)

7. Cu ce numere trebuie completate spațiile libere?

a)

2	6	3	4	8	4	11	5
7	21		12	14	7		10

(nota 7)

b)

100	85	70	55	
-----	----	----	----	--

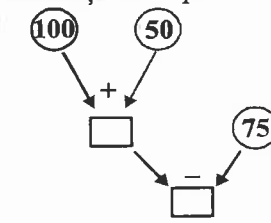
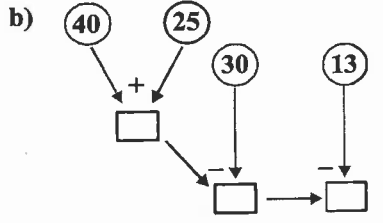
(nota 7)

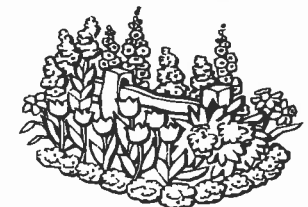
8. Ce numere ar trebui înscrise în dreptunghiurile goale?

$$750 \quad \boxed{400} \quad 350; \quad 153 \quad \boxed{} \quad 89; \quad 1050 \quad \boxed{} \quad 850$$

(nota 7)

9. Determinați numărul cu 99 mai mic decât cel mai mic număr natural de trei cifre distincte. (nota 5)
10. Calculați: a) $(54\,250 - 12\,134) + (51\,661 - 42\,293)$; b) $10\,067 + (4\,224 - 2\,002 + 9\,933)$; c) $100\,000 - (214\,175 - 196\,687) + 4\,087$. (nota 7)
11. Care sunt numerele $\neq$ naturale formate din trei cifre consecutive care adunate cu răsturnatele lor dau 888? (nota 7)
12. Calculați: a) $2\,506 - 889$; b) $(2\,506 + x) - (889 + x)$, unde x este un număr natural nenul; c) $(2\,506 - x) - (889 - x)$, unde x este număr natural cel mult egal cu 889. a) - (nota 5); b) și c) - (nota 7)
13. Calculați: a) $(x + 256) - x$; b) $(x + 256) - (x - 44)$, unde x este număr natural mai mare decât 44. a) - (nota 5); b) - (nota 7)
14. Completați căsuțele hașurate ale tabelului alăturat cu numere din șirul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, astfel încât pe orice linie sau coloană să se obțină o egalitate adevărată. (nota 7)
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|----|
| | + | 4 | + | | = | 16 |
| + | | | + | | - | |
| | + | | | - | 2 | = |
| - | | - | | | + | |
| | + | 6 | - | 1 | = | |
| = | | = | | = | | = |
| 4 | + | 7 | + | | = | 17 |
15. **Problemă aplicativă.** Un muncitor are un salariu de 655 euro. În aceeași lună pentru ore suplimentare mai primește suma de 254 euro și cheltuiește 753 euro. Ce sumă a economisit? (nota 7)
16. **Problemă aplicativă.** O societate comercială pentru aprovizionare cu materie primă a virat într-o zi suma de 352415 lei, iar a doua zi a virat o sumă cu 13000 lei mai mică decât în prima zi. Aflați:
a) Cât a virat societatea comercială în a doua zi?
b) Ce sumă a virat în ambele zile? (nota 7)
17. Calculați: $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2005 - 2 - 4 - 6 - 8 - \dots - 2004$. (nota 9)
18. Alcătuiți o problemă după exercițiul: $[287 + (287 + 498)] - 564$. (nota 7)
19. Alcătuiți o problemă a cărei rezolvare să se scrie:
 $1\,264 + (1\,264 - 397) + (1\,264 + 989) + a = 8\,126$. (nota 9)
20. Aflați numerele de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} - \overline{ba} = 36$. (nota 10)
21. Aflați termenul necunoscut x din:
a) $x + 45 = 87$; f) $345 + 123 = x + 235$;
b) $x + 1235 = 7325$; g) $3104 - (415 - x) = 3000$;
c) $13702 - x = 12721$; h) $42 + (x - 24) = 2302$;
d) $x - 3514 = 7235$; i) $2345 - 1234 + x = 7213 - 2513 + 42$;
e) $123 + x + 45 = 268$; j) $350 - x = 472 - 389$.
a) - d) (nota 5) e) - j) (nota 7)

22. Aflați termenul necunoscut x din:
a) $813 - x = 214$; d) $400 - (20 + 30 + x) = 100$;
b) $118 - x + 90 = 121$; e) $80 + x - 40 + 70 = 435$;
c) $x - 15 - 2 = 25$; (nota 7) f) $25 + x - 10 + x = 45$. (nota 9)
23. Aflați numărul natural n știind că:
a) $n + 8 \leq 12$; c) $n - 4 \leq 3$; e) $35 - 14 \geq n + 20$;
b) $n + 3 < 10$; d) $3115 + n \leq 3120$; f) $2 \leq n - 4 \leq 10$. (nota 7)
24. Suma a trei numere naturale este 10345. Primul număr este 2342, iar al doilea este 6358. Aflați cel de-al treilea număr. (nota 5)
25. Calculați cât mai rapid: $2012 \cdot 2013 - 2011 \cdot 2012 - 2 \cdot 2011$. (nota 7)
26. Scrieți, pentru fiecare din șirurile următoare câte patru termeni. Justificați!
a) 20; 50; 80; 110; ... b) 1998; 2008; 2018; 2028; ... c) 837; 832; 827; 822; ... (nota 7)
27. Aflați suma, apoi diferența dintre cel mai mare număr natural scris cu cinci cifre diferite și cel mai mare număr natural scris cu patru cifre, care are cifra sutelor 4. (nota 7)
28. Alcătuiți câte o problemă pentru fiecare din scheme următoare:
- a)  b)  (nota 7)
29. Completați spațiile libere:
a) Dacă adunăm un număr natural de 3 cifre cu un număr de 5 cifre, atunci suma are cel mult ... cifre și are cel puțin ... cifre.
b) Dacă adunăm două numere de 4 cifre, atunci suma are cel mult ... cifre și cel puțin ... cifre.
c) Dacă scădem un număr de 3 cifre dintr-un număr de 4 cifre, atunci diferența lor are cel mult ... cifre și cel puțin ... cifre. (nota 7)
30. În câte moduri se poate scrie numărul 42 ca diferență a două numere naturale de două cifre? (nota 7)
31. Stabiliți paritatea rezultatului unui exercițiu care conține numai adunări și scăderi și numărul termenilor impari este: a) 21; b) 29; c) 30; d) 2012. (nota 9)
32. **Problemă aplicată.** Pe o alee din parc sunt flori roșii, albastre și galbene. Se știe că 420 dintre ele nu sunt galbene și numai 360 nu sunt roșii. Numărul florilor albastre este 150. Aflați câte flori de fiecare culoare sunt? Care este numărul florilor de pe acea alee? (nota 7)



33. Problemă aplicată. La un sondaj de opinie privind utilizarea timpului liber, cei 25 de elevi ai unei clase au fost chestionați despre sporturile preferate. Au rezultat următoarele: 20 preferă tenisul de câmp, 28 preferă fotbalul, 32 joacă handbal și 24 joacă șah. Arătați că există în clasă 4 elevi care preferă toate cele patru sporturi.

(nota 9)



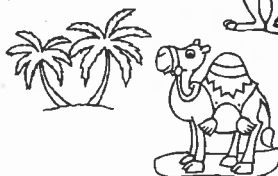
34. Problemă aplicată. Ogarul și vulpea se întrec pe distanța de 100 m. Când ogarul a ajuns la sosire, vulpea era la 20 m în spate. De la ce distanță în spatele liniei de start trebuie să pornească ogarul pentru a ajunge amândoi odată la sosire?

(nota 9)



35. O cămilă trebuie să ajungă în trei zile la o oază din deșert, aflată la 112 km față de locul unde este acum. În prima zi parcurge 43 km iar a doua zi 39 km. Câți km mai are de parcurs până să ajungă la oază?

(nota 9)



36. Ursul urmărește cei doi stupi (unul galben și unul verde) cu albine, aduși de curând la liziera pădurii. Sunt două familii tinere de albine. Ursul a primit anumite informații despre cât de numeroase sunt aceste familii. Astfel, el știe că familia din stupul galben are 6245 de membri, iar familia din stupul verde 8120 membri. Iscoada lui îi transmite că din stupul galben au plecat 5905 albine, iar din stupul verde 7895 de albine. La care stup va merge să fure miere, având în vedere riscul de a fi atacat și înțepat de albine?

(nota 10)



I.5. Înmulțirea numerelor naturale; proprietăți

Factor comun

Operații magice

$$\begin{aligned} 3 \times 37 &= 111 \text{ și } 1 + 1 + 1 = 3 \\ 6 \times 37 &= 222 \text{ și } 2 + 2 + 2 = 6 \\ 9 \times 37 &= 333 \text{ și } 3 + 3 + 3 = 9 \\ 12 \times 37 &= 444 \text{ și } 4 + 4 + 4 = 12 \\ 15 \times 37 &= 555 \text{ și } 5 + 5 + 5 = 15 \\ 18 \times 37 &= 666 \text{ și } 6 + 6 + 6 = 18 \\ 21 \times 37 &= 777 \text{ și } 7 + 7 + 7 = 21 \\ 24 \times 37 &= 888 \text{ și } 8 + 8 + 8 = 24 \\ 27 \times 37 &= 999 \text{ și } 9 + 9 + 9 = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \times 9 + 2 &= 11 \\ 12 \times 9 + 3 &= 111 \\ 123 \times 9 + 4 &= 1111 \\ 1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\ 12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\ 123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\ 1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\ 12345678 \times 9 + 9 &= 111111111 \\ 123456789 \times 9 + 10 &= 1111111111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \times 8 + 1 &= 9 \\ 12 \times 8 + 2 &= 98 \\ 123 \times 8 + 3 &= 987 \\ 1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\ 12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\ 123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\ 1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\ 12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\ 123456789 \times 8 + 9 &= 987654321 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \times 4 &= 16 \\ 34 \times 34 &= 1156 \\ 334 \times 334 &= 111556 \\ 3334 \times 3334 &= 11115556 \\ 33334 \times 33334 &= 1111155556 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \times 1 &= 1 \\ 11 \times 11 &= 121 \\ 111 \times 111 &= 12321 \\ 1111 \times 1111 &= 1234321 \\ 11111 \times 11111 &= 123454321 \\ 111111 \times 111111 &= 12345654321 \\ 1111111 \times 1111111 &= 1234567654321 \\ 11111111 \times 11111111 &= 123456787654321 \\ 111111111 \times 111111111 &= 12345678987654321 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \times 9 + 7 &= 88 \\ 98 \times 9 + 6 &= 888 \\ 987 \times 9 + 5 &= 8888 \\ 9876 \times 9 + 4 &= 88888 \\ 98765 \times 9 + 3 &= 888888 \\ 987654 \times 9 + 2 &= 8888888 \\ 9876543 \times 9 + 1 &= 88888888 \\ 98765432 \times 9 + 0 &= 888888888 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \times 7 &= 49 \\ 67 \times 67 &= 4489 \\ 667 \times 667 &= 444889 \\ 6667 \times 6667 &= 44448889 \\ 66667 \times 66667 &= 4444488889 \\ 666667 \times 666667 &= 444444888889 \\ 6666667 \times 6666667 &= 44444448888889 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12345679 \times 9 &= 111111111 \\ 12345679 \times 18 &= 222222222 \\ 12345679 \times 27 &= 333333333 \\ 12345679 \times 36 &= 444444444 \\ 12345679 \times 45 &= 555555555 \\ 12345679 \times 54 &= 666666666 \\ 12345679 \times 63 &= 777777777 \\ 12345679 \times 72 &= 888888888 \\ 12345679 \times 81 &= 999999999 \end{aligned}$$

Alte operații magice:

$$\begin{aligned} 1 \times 9 + 2 &= 11 \\ 21 \times 9 + 33 &= 222 \\ 321 \times 9 + 444 &= 3333 \\ 4321 \times 9 + 5555 &= 44444 \\ 54321 \times 9 + 66666 &= 555555 \\ 654321 \times 9 + 777777 &= 6666666 \\ 7654321 \times 9 + 8888888 &= 77777777 \\ 87654321 \times 9 + 99999999 &= 888888888 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \times 9 &= 81 \\ 99 \times 99 &= 9801 \\ 999 \times 999 &= 998001 \\ 9999 \times 9999 &= 99980001 \\ 99999 \times 99999 &= 9999800001 \end{aligned}$$

(selectate din *Talkhys*)

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \\ 11 \cdot 11 &= 121 \\ 111 \cdot 111 &= 12321 \\ 1111 \cdot 1111 &= 1234321 \\ 11111 \cdot 11111 &= 123454321 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (11 - 2) : 9 &= 1 \\ (111 - 3) : 9 &= 12 \\ (1111 - 4) : 9 &= 123 \\ (11111 - 5) : 9 &= 1234 \\ (111111 - 6) : 9 &= 12345 \\ &\dots \end{aligned}$$



Să recapitulăm:

⇒ Mara rezolvă în fiecare zi de școală câte 4 probleme de matematică. Câte probleme rezolvă Mara într-o săptămână?

Rezolvare:
 $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$
5 termeni

Observație: Înmulțirea este **adunarea repetată** a aceluiași număr natural.

$$\begin{array}{c} 5 \cdot 4 = 20 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{factori} \quad \text{produs} \end{array}$$



s	z	u
3	4	2
		2
...	...	4

s	z	u
3	4	2
		2
...	8	4

s	z	u
3	4	2
		2
6	8	4

s	z	u
1	2	7
		3
3	8	1

s	z	u
1	8	3
		2
3	6	6

s	z	u
1	3	4
		4
5	3	6

$$342 \cdot 2 = 684$$

$$\begin{array}{r} 534 \cdot \\ \underline{53} \\ 1602 \leftarrow \text{primul produs parțial} \\ 2670 \leftarrow \text{al doilea produs parțial} \\ 28302 \leftarrow \text{suma produselor parțiale} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 635 \cdot \\ \underline{172} \\ 1270 \leftarrow \text{primul produs parțial} \\ 4445 \leftarrow \text{al doilea produs parțial} \\ 635 \leftarrow \text{al treilea produs parțial} \\ 109220 \leftarrow \text{suma produselor parțiale} \end{array}$$

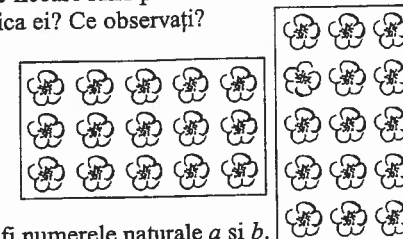
Proprietățile înmulțirii numerelor naturale



✿ Elena și bunica ei plantează flori. Fiecare are câte un strat de plantat. Elena plantează 5 rânduri de flori, iar pe fiecare rând pune câte 3 flori. Bunica plantează trei rânduri, iar pe fiecare rând pune câte 5 flori. Câte flori a plantat Elena? Dar bunica ei? Ce observați?

Rezolvare:

Elena plantează $3 \cdot 5 = 15$ flori.
 Bunica plantează $5 \cdot 3 = 15$ flori.



$$\begin{array}{ccccc} 3 \cdot 5 & = & 5 \cdot 3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

În general: $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a și b .

⇒ Spunem că înmulțirea este **comutativă**.

✿ Într-o cutie sunt 5 flacoane cu medicamente. Fiecare flacon conține câte 24 de drajeuri (comprimate). Dacă avem 3 astfel de cutii, câte drajeuri sunt în total? Calculați în două moduri. Ce observați?

Rezolvare:

Metoda I

Numărul flacoanelor din cele trei cutii este egal cu $3 \cdot 5 = 15$.
 Numărul drajeurilor din cele trei cutii este egal cu $(3 \cdot 5) \cdot 24 = 360$.

Metoda II

Numărul drajeurilor dintr-o cutie este egal cu $5 \cdot 24 = 120$.
 Numărul drajeurilor din cele trei cutii este egal cu $3 \cdot (5 \cdot 24) = 360$.

În concluzie: $(3 \cdot 5) \cdot 24 = 3 \cdot (5 \cdot 24)$
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$

În general: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pentru orice numere naturale a, b, c .

⇒ Spunem că înmulțirea este **asociativă**.

✿ Victor rezolvă pentru pregătirea etapei județene a olimpiadei de matematică câte 20 de probleme în fiecare zi. După 5 zile de lucru, face o pauză, după care mai lucrează 3 zile. Câte probleme a rezolvat Victor pentru etapa județeană? Rezolvați în două moduri.

Rezolvare:

Metoda I

$$5 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 100 + 60 = 160.$$

Metoda a II-a

$$(5 + 3) \cdot 20 = 8 \cdot 20 = 160.$$

Prin urmare, $(5 + 3) \cdot 20 = 5 \cdot 20 + 3 \cdot 20$
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$

În general: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c .

⇒ Spunem că înmulțirea este **distributivă față de adunare**.

✪ Într-o excursie de 3 zile Elena cheltuiește câte 60 de lei în fiecare zi, iar Ana cu câte 20 de lei mai puțin în fiecare zi decât Ileana. Ce sumă a cheltuit Ana în excursie?

Rezolvare:

Metoda I

$$60 \cdot 3 - 20 \cdot 3 = 180 - 60 = 120.$$

Metoda II

$$(60 - 20) \cdot 3 = 60 \cdot 3 - 20 \cdot 3.$$

Prin urmare, $(60 - 20) \cdot 3 = 60 \cdot 3 - 20 \cdot 3$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

În general: $(a - b) \cdot c = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c și $a \geq b$.

⇒ Spunem că înmulțirea este **distributivă** și față de scădere.



Putem calcula mai rapid, utilizând proprietățile înmulțirii?

Să observăm:

În egalitățile: $ab + ac = a \cdot (b + c)$ și $ab - ac = a \cdot (b - c)$, factorul a apare în fiecare din produsele $a \cdot b$ și $a \cdot c$. Spunem că a este **factor comun**.

Exemple:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 &= 7 \cdot (3 + 4); & 50 + 10 \cdot 9 &= 10 \cdot 5 + 10 \cdot 9 = 10 \cdot (5 + 9); \\ 8 \cdot 9 - 8 \cdot 6 &= 8 \cdot (9 - 6); & 49 - 35 &= 7 \cdot 7 - 7 \cdot 5 = 7 \cdot (7 - 5); \\ 13 \cdot 87 + 13 \cdot 13 &= 13 \cdot (87 + 13) = 13 \cdot 100 = 1300; \\ 1450 \cdot 971 + 1450 \cdot 29 &= 1450 \cdot (971 + 29) = 1450 \cdot 1000 = 1450000; \\ 80 + 120 + 530 &= 10 \cdot (8 + 12 + 53) = 10 \cdot 73 = 730; \\ 2009 \cdot 129 - 200900 - 2009 \cdot 27 &= 2009 \cdot (129 - 100 - 27) = 2009 \cdot 2 = 4018. \end{aligned}$$



Alte proprietăți ale înmulțirii numerelor naturale
Sume Gauss

1. Calculați cât mai rapid suma: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Rezolvare:

Observăm că suma termenilor 1 și 100 este 101, termenii 2 și 99 au suma tot 101, la fel 3 și 98 ș.a.m.d. Scriind suma S în două moduri, odată cu termenii în ordine crescătoare și odată cu termenii în ordine descrescătoare obținem: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$ și

$$S = 100 + 99 + \dots + 2 + 1.$$

Adunând cele două egalități parte cu parte, obținem: $S + S = 2 \cdot S = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (3 + 98) + \dots + (99 + 2) + (100 + 1) = \underbrace{101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ de termeni}}$. Deci $2S = 100 \cdot 101$, de unde

$S = (100 \cdot 101) : 2 = 101 \cdot 50 = 5050$. Folosind același procedeu putem calcula, suma primelor n numere naturale nenule, oricare ar fi n număr natural.

Dacă $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$, atunci $S = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1$, de unde $2 \cdot S = \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)}_{n \text{ termeni}} = (n + 1) \cdot n$, de unde $S = [n \cdot (n + 1)] : 2$.

Putem conchide că: $1 + 2 + \dots + n = [n \cdot (n + 1)] : 2$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

2. Calculați suma: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) + (2n + 1)$.

Rezolvare:

Trebuie să calculăm suma primelor $n + 1$ numere naturale nenule.

$$S = (1 + 2 \cdot 0) + (1 + 2 \cdot 1) + (1 + 2 \cdot 2) + \dots + [1 + 2 \cdot (n - 2)] + [1 + 2 \cdot (n - 1)] + (1 + 2n)$$

$$S = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n + 1) \text{ termeni}} + (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot n)$$

$$S = (n + 1) + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n)$$

$$S = (n + 1) + 2 \cdot [n(n + 1)] : 2$$

$$S = (n + 1) + n(n + 1)$$

$$S = (n + 1)(n + 1)$$

$$S = (n + 1)^2.$$

Exemple: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 + 101 = (50 + 1)^2$ pentru că $101 = 2 \cdot 50 + 1$.
 $1 + 3 + 5 + \dots + 1003 = (501 + 1)^2$ pentru că $1003 = 2 \cdot 501 + 1$.

Rețineți!

⇒ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (spunem că 1 este **element neutru** la înmulțirea numerelor naturale);

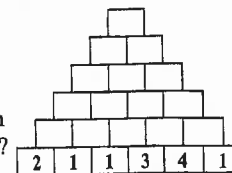
⇒ $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (0 este **element absorbant**).



Să rezolvăm:

Piramida înmulțirii

În fiecare casetă se scrie produsul celor două numere situate în casetele de sub ea. Cine află mai repede numărul din vârful piramidei?



EXERCIIII ȘI PROBLEME

1. Calculați:

- | | | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|-----------------------|-------------------------------|
| a) $4 \cdot 12$; | f) $15 \cdot 14$; | k) $15 \cdot 10$; | p) $35 \cdot 222$; | v) $304 \cdot 507 \cdot 88$; |
| b) $7 \cdot 14$; | g) $22 \cdot 44$; | l) $101 \cdot 12$; | r) $75 \cdot 404$; | z) $456 \cdot 1200$. |
| c) $15 \cdot 8$; | h) $32 \cdot 17$; | m) $13 \cdot 405$; | s) $332 \cdot 123$; | |
| d) $16 \cdot 10$; | i) $25 \cdot 24$; | n) $32 \cdot 105$; | t) $102 \cdot 305$; | |
| e) $11 \cdot 12$; | j) $14 \cdot 29$; | o) $33 \cdot 202$; | u) $1357 \cdot 246$; | |

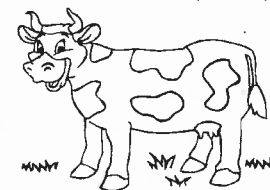
(nota 5)

2. Scrieți numerele 11, 24 și 28 ca produse de două numere naturale.

(nota 5)

3. **Problemă aplicativă.** O vacă dă 21 de litri de lapte pe zi. Ce cantitate de lapte dă vaca în 246 de zile? Dar 15 vaci în aceeași perioadă?

(nota 7)

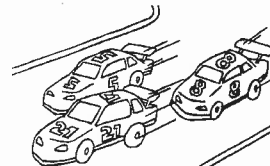


4. **Problemă aplicativă.** Într-o livadă sunt plantați pomi fructiferi câte 45 pe un rând. Știind că în livadă sunt 58 astfel de rânduri, aflați, numărul pomilor din livadă.

(nota 7)

5. **Problemă aplicativă.** Un automobil consumă 5l de benzină la 100 de km parcurși. Câtă benzină consumă 23 de automobile de același fel, tot pe distanța de 100 km? Dar pe 200 km?

(nota 7)



6. **Problemă aplicativă.** Într-un flacon de medicamente sunt 30 de pilule. Știind că într-o cutie încap 24 de flacoane, iar un bax conține 60 de cutii, aflați care este numărul de pilule într-un bax.

(nota 7)

7. **Problemă aplicativă.** Un brăduț artificial are 36 de ramuri, fiecare ramură are 12 ramuri mai mici și fiecare ramură mică are 8 rămurile. Câte ramuri mici are acest brad? Dar rămurile?

(nota 7)



8. Se dau numerele: $a = 25 \cdot 25 - 15 \cdot 5$; $b = 1\,403 \cdot 3 - 204 \cdot 4$. Arătați care din relațiile următoare sunt adevărate: $a > b$; $a < b$; $a + 2\,843 = b$. (nota 7)

9. Calculați cât mai rapid: a) $252 \cdot 25$; $120 \cdot 15$; $75 \cdot 16$; b) $273 \cdot 18$; $247 \cdot 16$; $182 \cdot 45$. (nota 5)

10. Calculați: a) $42 \cdot 5 \cdot 0 \cdot 7 \cdot 10$; c) $6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 0$; b) $1121 \cdot 151 \cdot 0 \cdot 45$; d) $(25 - 1 \cdot 1) \cdot (25 - 2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (25 - 5 \cdot 5)$. (nota 7)

11. Calculați cât mai rapid: a) $2 \cdot 232 \cdot 5$; $25 \cdot 84 \cdot 4$; $125 \cdot 7 \cdot 8$; $25 \cdot 7 \cdot 8$; b) $2 \cdot 72 \cdot 50$; $4 \cdot 30 \cdot 75$; $25 \cdot 11 \cdot 16$; $125 \cdot 51 \cdot 4$. (nota 7)

12. Reconstituiți înmulțirile: a) $\begin{array}{r} 125 \\ * * \\ \hline 3 * 5 \\ 7 * 0 \\ \hline * * * 5 \end{array}$; b) $\begin{array}{r} 3 * 6 \\ * * * \\ \hline * 5 * * \\ * * * \\ \hline * * * \\ \hline 6 * * * 0 \end{array}$. (nota 7)

13. Reconstituiți înmulțirea: $\begin{array}{r} * * * \times \\ * * \\ \hline 1629 \\ * * * * \\ \hline 2 * * * 9 \end{array}$. (nota 9)

14. Calculați: a) $6 + 4 \cdot 5$; e) $22 \cdot 15 + 25 \cdot 12$; i) $1997 - 1799$; b) $15 + 6 \cdot 12$; f) $15 + 25 \cdot 3 + 10$; j) $1234 - 432 - 321$; c) $21 \cdot 2 + 13 \cdot 5$; g) $105 \cdot 4 - 44 \cdot 5$; k) $13\,452 - 893 - 439$; d) $9 \cdot 15 + 18 \cdot 25$; h) $333 - 33 \cdot 9 - 12 \cdot 3$. (nota 7)

15. Calculați numărul de 125 ori mai mare decât: a) 35; b) 63; c) 129; d) 1342; e) 12523; f) 102034. (nota 7)

16. Completați tabelul:

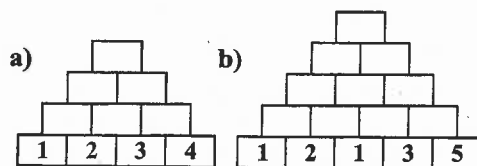
a	b	c	$a \cdot (b \cdot c)$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot (b - c)$	$ab - bc$
25	19	13				
24	18	12				
13	8	7				
124	96	66				
30	20	13				
19	17	13				

(nota 7)

17. Piramida înmulțirii

În fiecare casetă se scrie produsul celor două numere situate în casetele de sub ea. Aflați numărul situat în vârful piramidei.

(nota 7)



18. Calculați și apoi aproximați prin adaos la sute produsele:

a) $21 \cdot 13 \cdot 12$; c) $(31 + 29) \cdot 176$; b) $412 \cdot 12 \cdot 123$; d) $239 \cdot (457 - 129)$. (nota 9)

19. Fie șirul de numere: 5, 12, 19, 26, ... a) Completați șirul cu încă doi termeni. b) Găsiți al 100-lea termen al șirului. (nota 7)

20. Se dau numerele: 2 437 și 1988. Aflați produsul dintre suma și diferența acestor numere. (nota 5)

21. Din triplul sumei numerelor 4 036 și 964 scădeți dublul sumei răsturnatelor numerelor 1 101 și 999. (nota 7)

22. Să se scrie 12 ca sumă și produs al acelorași numere naturale. (nota 7)

23. Scrieți numerele 21 și 35 ca sumă și produs al acelorași numere naturale. (nota 7)

24. Suma a două numere este 15. Aflați cea mai mare valoare posibilă a produsului lor. (nota 9)

25. Determinați numerele naturale a căror sumă și produs este 91. (nota 9)

26. Să se afle trei numere naturale distincte două câte două știind că produsul lor este 12 și suma lor este minimă. (nota 7)

27. Problemă aplicativă. Într-o clasă 16 bănci sunt ocupate de câte 2 elevi, într-o bancă stă un elev, iar 3 bănci sunt libere. Câte bănci și câți elevi sunt? (nota 7)

28. Problemă aplicativă. Pentru o cantină s-au cumpărat 17 saci cu câte 50 kg cartofi, 2 saci cu câte 35 kg ceapă și 17 saci cu câte 25 kg făină. Câte kilograme de alimente s-au cumpărat? (nota 7)

29. Ce număr trebuie adunat la 75 pentru a obține triplul lui 62? (nota 7)

30. Se dau două numere naturale, unul fiind de 5 ori mai mare decât celălalt. Aflați suma lor știind că cel mai mic dintre ele este mai mare decât 3 și mai mic decât 9. (nota 7)

31. Problemă aplicativă. La plecarea în vacanță cei 25 de elevi din clasă au hotărât ca fiecare să trimită celorlalți câte o scrisoare. Câte scrisori au fost expediate? (nota 7)

32. Utilizând proprietățile înmulțirii numerelor naturale calculați:

a) $ac + bc$, dacă $a + b = 52$ și $c = 10$; b) $ac - bc$, dacă $a - b = 31$ și $c = 5$; c) a , dacă $ab + ac = 42$ și $b + c = 21$; d) a , dacă $ab + ac + a = 176$ și $b + c = 10$. (nota 7)

33. a) Dacă $a = 7$, $b + c = 15$ și $b - c = 7$, calculați $ab + ac$ și $ab - ac$;

b) Dacă $a = 7$ și $b + c + d = 70$, calculați $ab + ac + ad$.

c) Dacă $a = 3$ și $b + c + d = 30$, calculați $3a + 2(ab + ac + ad)$. (nota 5)

34. Calculați (utilizând, eventual, factorul comun):

a) $72 \cdot 27 + 27 \cdot 28 + (39 \cdot 93 - 39 \cdot 39) : 54$;

b) $(36 \cdot 1998 - 1997 \cdot 36) \cdot 54 - (7\,654 - 4 \cdot 76 \cdot 25) \cdot 36$;

c) $1997 \cdot 109 - 199\,700 - 1997 \cdot 7 - 1997$. (nota 7)

35. Aflați x știind că:

- a) $xa + xb + xc = 40$ și $a + b + c = 10$; b) $4ax + 3bx - 2cx = 80$ și $4a + 3b = 2c + 16$;
c) $2x + a^2 + ab + ac = 60$ și $a = 4$, $b + c = 8$. (nota 5)

36. Efectuați:

- a) $3\ 757 \cdot 26 + 3\ 757 \cdot 75 - 3\ 757$; d) $158 \cdot 432 + 158 \cdot 68 - 158 \cdot 400$;
b) $4\ 756 \cdot 34 - 4\ 756 + 4\ 756 \cdot 67$; e) $2\ 300 \cdot 28 - 28 \cdot 2\ 299 - 28$;
c) $2\ 432 \cdot 17 - 2\ 432 \cdot 16 - 2\ 432$; f) $1\ 245 \cdot 200 + 100 \cdot 1\ 245 - 1\ 245 \cdot 290$. (nota 7)

37. Calculați: a) $1997 \cdot 315 + 1997 \cdot 475 + 1997 \cdot 1210$;
b) $34 \cdot 15\ 345 + 34 \cdot 75\ 655 - 34 \cdot 41\ 000$;
c) $13\ 577 \cdot 21\ 345 - 13\ 577 \cdot 9\ 350 - 13\ 577 \cdot 11\ 995$;
d) $1995 + 1995 \cdot 1996 - 1997 \cdot 1994$. (nota 7)

38. Dacă $a \cdot b = 30$ și $a \cdot c = 18$, calculați: i) $a \cdot (b + c) : 16$; ii) $a \cdot (b - c) : 4$. (nota 7)

39. Calculați $7a + 9b + 9c + 7d$, știind că $a + b + c + d = 30$ și $a + d = 10$. (nota 7)

40. Dacă $3a + 2b + 4c = 494$ și $b + 2c = 160$, calculați a și $ab + 2ac$. (nota 7)

41. Aflați numerele naturale a , b , c știind că: $a + b + c = 54$; $c \cdot (a + b) = 0$ și $a = 5b$. (nota 7)

42. Calculați $2a + 3b + c$, dacă $a + b = 20$ și $b + c = 30$. (nota 7)

43. Calculați $5a + 7b + c$, dacă $4a + 7b = 840$ și $a + c = 120$. (nota 7)

44. Dacă $9a + 6b + 12c = 690$ și $b + 2c = 40$, calculați a și $ab + 2ac$. (nota 7)

45. Dacă a , b , c , sunt numere naturale astfel încât $a + b + c = 25$ și $2a + b + 2c = 57$, calculați $(a + c) \cdot (3a + 2b + 3c)$. (nota 9)

46. Calculați $2a + 9b + 3c$, dacă $a + 3b = 120$ și $b + c = 40$. (nota 7)

47. Calculați: $3a + 5b + 2c$, dacă $a + b = 15$ și $b + c = 14$. (nota 7)

48. Știind că $a + b = 20$ și $b + c = 40$, calculați valoarea numerică a expresiilor: $4a + 9b + 5c$ și $b^2 + ab + ac + bc$. (nota 7)

49. Determinați numerele naturale a și b care verifică relația $2a + 6b = 32$. (nota 9)

50. Aflați numerele naturale x , y , z , știind că: $xz + 7yz + z = 49$ și $x + 7y = 6$. (nota 9)

51. Aflați numărul de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} + \overline{ab} + a = \overline{ba}$.

52. Să se determine numărul natural de forma $\overline{abc}$, știind că: $\overline{abc} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + a + b + c = 195$.

53. Din egalitățile: $ab - ac = bc - c^2$ și $b = c + 1$ să se deducă:

- a) o relație între a și c ; b) valoarea numerică a expresiei $2b - a - c$;
c) valoarea numerică a produsului $(a^2 - b^2) \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 - a^2)$. (nota 10)

54. Problemă aplicativă. O revistă Auto folosește un sistem de rating pentru a evalua 5 mărci de mașini în vederea acordării premiului anului. Punctajele mașinilor sunt reprezentate în tabelul următor. (nota 9)

Mașina	Dotări de securitate (S)	Consum (C)	Aspect exterior (E)	Aspect interior (I)
Ford	4	3	3	2
Fiat	3	4	3	3
Mercedes	4	2	4	3
Opel	3	2	4	4
Honda	4	3	3	3

Pentru rating se acordă următoarele calificative:

4 puncte = excelent; 3 puncte = bine; 2 puncte = satisfăcător.

Pentru calcularea punctajului total a unei mașini revista Auto folosește următoarea formulă: Punctaj total = $3 \times S + 2 \times C + E + I$.

- a) Calculează punctajul total pentru mașina Ford, apoi pentru mașina Honda.

- b) Producătorul firmei Fiat consideră formula punctajului total ca fiind incorectă.

Scrie o formulă astfel încât mașina Fiat să ocupe locul I, astfel încât:

Punctaj total = $\dots \times S + \dots \times C + \dots \times E + \dots \times I$. (nota 9)

55. La o întâlnire amicală de șah iau parte 25 de concurenți. Fiecare concurent a jucat cu fiecare câte o partidă. Câte partide s-au jucat în total? (nota 7)

56. Suma a două numere naturale este 14. Aflați valoarea maximă a produsului lor. (nota 9)

57. Produsul a două numere naturale este egal cu 36. Aflați valoarea minimă a sumei lor. (nota 9)

58. Problemă aplicativă. Doi bicicliști pornesc, simultan, unul către celălalt din orașele X și Y. Care este distanța dintre cele două orașe, știind că primul are viteza de 20 km/h, iar al doilea are viteza 18 km/h și se întâlnesc după 4 ore de la plecare. Calculați în două moduri. (nota 7)



59. Aflați ultima cifră a produsului:

- a) $342 \cdot 575 \cdot 239$; b) $242 \cdot 893 \cdot 51 \cdot 75$;
c) $814 \cdot 277 \cdot 321 \cdot 743$; d) $233 \cdot 784 \cdot 346 \cdot 29$. (nota 7)

60. Completați spațiile libere:

- a) Dacă înmulțim două numere de două cifre, atunci produsul are cel mult ... cifre și cel puțin ... cifre.

- b) Dacă înmulțim un număr de două cifre cu un număr de 5 cifre, atunci produsul are cel mult ... cifre și cel puțin ... cifre. (nota 9)

61. Sume Gauss. Calculați cât mai rapid:

- a) $(5 + 10 + 15 + \dots + 2005 + 2010) : (1 + 2 + 3 + \dots + 400 + 402)$;
 b) $(4 + 8 + 12 + \dots + 2008 + 2012) : (2 + 4 + 6 + \dots + 1004 + 1006)$;
 c) $1 + 3 + 5 + \dots + 2011 + 2013$;
 d) $1 + 6 + 11 + \dots + 2006 + 2011$;
 e) $1 + 4 + 7 + \dots + 2011 + 2014$;
 f) $4 + 9 + 14 + \dots + 2009 + 2014$.

(nota 9)

62. Calculați suma tuturor numerelor naturale de trei cifre care se împart exact la 15.

(nota 9)

63. Aflați numărul natural a din: $a + 2a + 3a + \dots + 99a + 100a = 10100$.

(nota 9)

64. Comparați numerele $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$ și $b = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 117 + 120$.

(nota 10)

65. 49 de plăcinte costă atâția euro câte plăcinte poți cumpăra cu un euro. Câte plăcinte poți cumpăra cu un euro?

(nota 9)

66. Produsul a 100 de numere naturale este 100. Care este cea mai mică valoare a sumei acestor numere?

(nota 9)

67. Pentru fiecare număr natural de două cifre se calculează produsul cifrelor sale și apoi se calculează suma cifrelor rezultatului obținut. Care este cea mai mare valoare a sumei astfel obținute?

(nota 9)

68. O veveriță își face provizii pentru iarnă. La începutul săptămânii avea deja adunate 75 de alune și zilnic a mai adus și depozitat câte 8 alune. A observat un viezure care dădea târcoale depozitului cu provizii. La sfârșitul săptămânii numără iar alunele: sunt 128. Oare a reușit să fure viezurele din alune?

(nota 9)

69. Familia Ionescu cumpără un mini-seif care are 3 compartimente, copiilor lor: Vlad, Miruna și Tudor. Ușița fiecărui compartiment este prevăzută cu un dispozitiv pentru cod, având 4 poziții. Seiful se poate deschide doar dacă se acționează simultan asupra celor trei compartimente și dacă diferența dintre codul celui de al doilea compartiment și al primului este 1279, iar dintre codul celui de al treilea compartiment și al doilea este dublul primei diferențe. La ce serie de coduri „răspunde” seiful dacă:

Vlad alege pentru primul compartiment 5078.

Miruna alege pentru al doilea compartiment 7054.

Tudor alege pentru al treilea compartiment 5231.

(nota 9)

70. Casandra are un colier din perle. Fiecare perlă valorează 485 lei. Dacă colierul are 25 de perle, care este valoarea perlelor din acest colier?

(nota 9)

71. Dacă cel mai mic om din imaginea alăturată ar avea o înălțime de 52 de cm, iar despre vecinul lui știm că are o înălțime de 4 ori și jumătate mai mare, câți centimetri are acesta?

Dacă însă știm că persoana mai înaltă are 234 cm și este cu 182 de centimetri mai înalt de cât prietenul lui mai mic, care este înălțimea acestuia?

(nota 9)

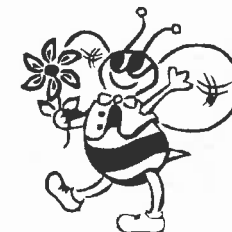


72. Marcel este cu 860 de zile mai „bătrân” decât Alexandru. Dacă împreună au 8696 de zile, ce vârstă în ani, ar putea avea Marcel și, respectiv, Alexandru?

(nota 9)

73. O albinuță a găsit într-o grădină două straturi cu flori. Numără florile și constată că sunt 90 de flori, câte 45 într-un strat. Poate duce nectarul de la 3 flori. Nectarul îl colectează într-un minut și jumătate, pentru a ajunge până la stup are nevoie de 6 minute, iar pentru a lăsa nectarul, de un minut. De cât timp (ore și minute) are nevoie albinuța pentru a reuși să transporte nectarul florilor, din momentul în care a descoperit aceste straturi?

(nota 9)



74. Alex vrea să-i ducă bunicii un coș cu fructe: mere, portocale și pere. Tatăl lui Alex îi precizează că nu are voie să ducă o greutate mai mare de 4 kg. În coș sunt câte 7 fructe din fiecare fel. Presupunem că merele au aceeași greutate și anume 180 g, perele la fel – 240 g, iar portocalele și ele au fiecare câte 200 g. Alex se gândește că dacă golește fructe din coș pentru a nu depăși cele 4 kg (coșul are 700 g), va putea pleca la bunica. Cum trebuie să procedeze pentru a-i duce o cantitate cât mai mare de fructe și să aibă în coș fructe din fiecare fel?

(nota 10)



I.6. Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor rotunde, pătrate și accolade



Să ne amintim!

☆ Victor primește într-o săptămână zilnic câte 7 lei, de la mama lui, punându-i în pușculiță. Pentru obținerea unor note foarte bune el primește la sfârșitul săptămânii o recompensă de 30 de lei de la tatăl său. Ce sumă are Victor în pușculiță la sfârșitul săptămânii?

Rezolvare: $30 + 7 \cdot 5 = 30 + 35 = 65$.

Victor are în pușculiță 65 de lei.



Observație: Am efectuat mai întâi operația de înmulțire care este o adunare repetată

$$7 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5.$$

Rețineți!

⇒ Spunem că înmulțirea este o operație de **ordinul al doilea**, iar adunarea și scăderea sunt operații de **ordinul întâi**.



⇒ Într-un exercițiu care conține toate operațiile fără paranteze se efectuează mai întâi operația de **ordinul al doilea** (înmulțirea), apoi operațiile de **ordinul întâi** (adunarea și scăderea), în ordinea scrierii lor.

Exemple:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 12 + 7 \cdot 11 - 25 = \\ & = 60 + 77 - 25 = \\ & = 137 - 25 = \\ & = 112. \end{aligned}$$

⇒ Dacă exercițiul conține și paranteze se procedează astfel: se efectuează mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele pătrate, după care operațiile din parantezele accolade și la final operațiile din exteriorul parantezelor accolade.

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 10 + \{[(8 \cdot 4 - 12) + 5 \cdot 7] \cdot 4 + 10\} \cdot 3 = \\ & = 40 + \{[(32 - 12) + 35] \cdot 4 + 10\} \cdot 3 = \\ & = 40 + [(20 + 35) \cdot 4 + 10] \cdot 3 = \\ & = 40 + (55 \cdot 4 + 10) \cdot 3 = \\ & = 40 + (220 + 10) \cdot 3 = \\ & = 40 + 230 \cdot 3 = \\ & = 40 + 690 = \\ & = 730. \end{aligned}$$

EXERCII ȘI PROBLEME

1. Calculați:

- | | | |
|------------------------|---------------------------------------|---|
| a) $232 + 169 - 172$; | e) $15 \cdot 17 - 21 \cdot 7$; | h) $2340 - 17 \cdot 21 - 3 \cdot 42$; |
| b) $572 - 379 + 112$; | f) $121 \cdot 13 + 42 \cdot 23$; | i) $48 \cdot 11 + 103 \cdot 12 - 301 \cdot 5$; |
| c) $872 - 321 - 239$; | g) $530 + 11 \cdot 13 - 5 \cdot 42$; | j) $42 \cdot 10 - 21 \cdot 20 + 8 \cdot 9$. |

(nota 5)

2. Să se efectueze:

- | | |
|---|--|
| a) $5 \cdot 9 - (100 - 8 \cdot 9)$; | e) $25 \cdot (40 - 30) + 48 \cdot (12 - 8)$; |
| b) $35 \cdot 112 - (2000 - 167 \cdot 5)$; | f) $(270 + 130) \cdot 80 - 30000$; |
| c) $(114 \cdot 2 - 60) + 18 \cdot 3 - (160 - 8 \cdot 20)$; | g) $(23 \cdot 4 - 72 + 1234567) \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 6)$; |
| d) $(223 - 42) \cdot 6 - (23 \cdot 2 - 15) \cdot 2$; | h) $(24 \cdot 3 - 8 \cdot 9) \cdot (15234 - 5829 - 34)$. (nota 7) |

3. Calculați:

- | | |
|---|--|
| a) $7 + 3 \cdot [2 + 3 \cdot (7 \cdot 2 - 4 \cdot 3) + 8]$; | d) $[40 + 50 \cdot (384 - 180 \cdot 2)] \cdot 5 + 0 \cdot 2008$; |
| b) $300 + 42 \cdot 10 - [21 \cdot 4 + 4 \cdot (9 + 15 - 14)]$; | e) $[72 - 3 \cdot (5 \cdot 6 - 7)] \cdot [48 + 2 \cdot (48 - 3 \cdot 15)]$; |
| c) $23 \cdot 12 + [41 \cdot (12 \cdot 43 - 15 \cdot 25)] - 24 \cdot 10$; | f) $145 - 2 \cdot [5024 - 7 \cdot (128 \cdot 5 + 7 \cdot 11) + 13 \cdot 5]$. (nota 9) |

4. Calculați:

- | |
|---|
| a) $3 + 5 \cdot \{82 + 3 \cdot [21 + 4 \cdot (3 \cdot 8 - 9)]\}$; |
| b) $\{15 + 2 \cdot [4 + 3 \cdot (120 \cdot 4 + 9 \cdot 3 - 2 - 2 - 2)] - 4\} \cdot 10$; |
| c) $120 + 3 \cdot \{2 \cdot 3 \cdot 40 + 7 \cdot [9 \cdot 2 - 2 \cdot (3 \cdot 6 - 3 - 6) + 10] - 40\} - 9$; |
| d) $13 \cdot \{24 + 6 \cdot [24 - 3 \cdot (8 \cdot 4 - 31)] - 150\} + 402$; |
| e) $42 + 18 \cdot \{5 + 3 \cdot [21 + 2 \cdot (529 - 8 \cdot 48) - 12 \cdot 2] - 9\} - 41$. |
| f) $2012 - \{2012 - \{2012 - \{2012 - \{2012 - [2012 - (2012 - 2011)]\}\}\}\}$. (nota 9) |

5. Verificați dacă:

- | | |
|---|----------|
| a) $\{[(8 \cdot 3 - 9) + 3 \cdot 7] \cdot 2 + 9\} \cdot 3 - [(4 + 4 \cdot 4) \cdot 4 - 50] = 213$; | (nota 9) |
| b) $10 \cdot \{2 + 10 \cdot [140 + 5 \cdot (25 + 25 \cdot 4)]\} - 1913 \cdot 40 = 0$. | |

Test 1 (inițial)

- | | |
|---|----------------|
| 1. Scrieți cu cifre numărul natural trei milioane trei sute trei. | (5p) (nota 5) |
| 2. Scrieți cel mai mic număr natural care are șase cifre distincte. | (5p) (nota 5) |
| 3. Scrieți cel mai mic număr natural, care este mai mare decât 2004. | (5p) (nota 5) |
| 4. Calculați: | |
| a) $567 + 2009$; | (5p) (nota 5) |
| b) $4002 - 1993$; | (5p) (nota 5) |
| c) $72 \cdot 12$; | (5p) (nota 5) |
| d) $6318 : 9$. | (5p) (nota 5) |
| 5. Aflați x din: a) $2305 - x = 299$; | |
| b) $[5 \cdot (5x - 5) - 120] \cdot 5 - 25 = 125$. | (10p) (nota 9) |
| 6. Calculați: a) $159 \cdot 2005 + 2005 \cdot 42 - 2005$; | |
| b) $[42 - 8 : (240 : 6 - 216 : 6)] : 4$. | (10p) (nota 7) |
| 7. Dănuț și Alina au împreună 685 de nuci. Știind că Alina are cu 413 nuci mai multe decât Dănuț, aflați câte nuci au fiecare. | |
| (10p) (nota 7) | |
| 8. Suma a trei numere naturale este 366. Împărțind al doilea număr la primul se obține câtul 2 și restul 7; împărțind al treilea număr la al doilea se obține câtul 2 și restul 2. Aflați cele trei numere. | |
| (10p) (nota 10) | |

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

⌚ Test 2 (inițial)

- Completați spațiile libere:
 - Dintre numerele 1908 și 1098 mai mare este (5p) (nota 5)
 - Diferența dintre triplul numărului 23 și dublul acestuia este (5p) (nota 5)
 - Cel mai mare număr natural de patru cifre distincte este (5p) (nota 5)
 - Calculați:
 - $207 + 908$; b) $1001 - 982$; (5p) (nota 5)
 - $15 \cdot 81$; d) $2575 : 5$; (5p) (nota 5)
 - $87 - 87 : 87 - (100 - 100 : 5)$; (10p) (nota 5)
 - Aflați x din:
 - $x + 12 = 101$; b) $x \cdot 3 = 186$; (5p) (nota 5)
 - $x : 5 = 125$; d) $225 : x = 5$. (10p) (nota 7)
 - Victor citește o carte care are 350 de pagini. Luni a citit 20 de pagini iar în fiecare din zilele următoare cu 10 pagini mai mult decât în ziua precedentă. Câte pagini va avea de citit Victor duminică? (10p) (nota 7)
 - Suma a trei numere naturale este 707. Aflați numerele dacă al doilea număr este cu 32 mai mare decât primul, iar al treilea este de două ori mai mic decât primul. (20p) (nota 9)
 - Fie șirul 3, 9, 15, 21, a) Completați șirul cu încă doi termeni. b) Determinați al 100-lea termen al șirului. c) Aflați suma primilor 50 de termeni. (10p) (nota 10)
- Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

⌚ Test 3 (inițial)

- Scrieți în ordine crescătoare numerele de trei cifre, cu produsul cifrelor 4. (5p) (nota 5)
 - Scrieți toate numerele de trei cifre, cu suma cifrelor 3. (5p) (nota 5)
 - Calculați produsul dintre suma numerelor 7183 și 2752 și diferența dintre numerele 485 și 475. (10p) (nota 5)
 - Calculați:
 - $2183 + 502 + 1$; (5p)(nota 5) c) $503 \cdot 12$; (10p) (nota 5)
 - $7112 - 301$; (5p)(nota 5) d) $3458 : 7$; (10p) (nota 7)
 - $53 + 17 \cdot [2010 - 5 \cdot (375 + 25)]$. (10p) (nota 7)
 - Precizați predecesorul și succesorul celui mai mic număr natural de 4 cifre distincte. (10p) (nota 9)
 - Suma a trei numere naturale pare consecutive este 90. Aflați numerele. (10p) (nota 9)
 - Dacă micșorăm un număr cu 27, diferența o înmulțim cu 3 și produsul îl mărim cu 10, obținem 100. Aflați numărul inițial. (10p) (nota 10)
- Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

⌚ Test 4 (inițial)

- Completați căsuțele goale astfel încât suma numerelor din oricare trei căsuțe consecutive să fie 23. (5p) (nota 5)

7			7	11				5
---	--	--	---	----	--	--	--	---

- Câte numere de forma $\overline{9ab1}$ există? (5p) (nota 5)
- Aflați diferența dintre dublul numărului 83 și sfertul numărului 88. (5p) (nota 5)
- Aflați x din:
 - $x + 703 = 901$; c) $275 - x = 123$; e) $117 : x = 9$; (15p) (nota 5)
 - $x - 58 = 144$; d) $x : 7 = 123$; f) $2x \cdot 54 = 216$.
- Calculați:
 - suma numerelor 2485 și 1439; (5p) (nota 5)
 - diferența numerelor 853 și 408; (5p) (nota 5)
 - dublul sumei numerelor 768 și 1085; (5p) (nota 7)
 - produsul numerelor 42 și 25; (5p) (nota 7)
 - câțul numerelor 42012 și 9. (10p) (nota 7)
- Ioana dorește să cumpere trei cărți. Prima carte costă 218 lei, a doua cu 42 lei mai puțin decât prima și a treia are prețul jumătate din prețul celei de a doua cărți. Dacă Ioana are 485 lei, poate să cumpere toate cele trei cărți? (20p) (nota 9)
- Suma a trei numere naturale este 220. Dacă dublăm primul număr, pe al doilea îl micșorăm cu 2 și pe al treilea îl mărim cu 7, obținem de fiecare dată același rezultat. Aflați numerele. (10p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

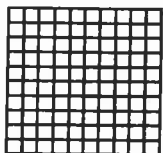
I.7. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural; compararea puterilor care au aceeași bază sau același exponent



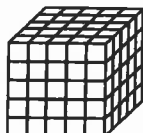
Să observăm:



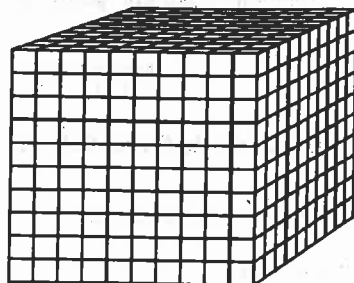
a)



b)



c)



d)

Câte pătrățele avem în pătratele din figurile a) și b)?
Câte cubulețe avem în figurile c) și d)?

Rezolvare:

În figura a) avem $5 \cdot 5 = 25$ de pătrățele.

În figura b) avem $10 \cdot 10 = 100$ de pătrățele.

În figura c) avem: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ de cubulețe.

În figura d) avem $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ cubulețe.

Notăm:

$$5 \cdot 5 = 5^2.$$

$$10 \cdot 10 = 10^2.$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3.$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3.$$

Citim:

Cinci la puterea a II-a (pătrat).

Zece la puterea a II-a (pătrat).

Cinci la puterea a III-a (cub).

Zece la puterea a III-a (cub).

Avem: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$ ← exponentul puterii
← baza puterii

Citim: „6 la puterea a 5-a” sau „puterea a 5-a a lui 6”.

În general: $6^5 \rightarrow a^n$.

Puterea a n -a a numărului natural a este produsul a n factori egali cu numărul a .

Avem $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, pentru a și n numere naturale, $n \neq 0$ și $n \neq 1$.

Scrierea a^n se citește „ a la puterea n ” sau „puterea a n -a a numărului a ”.

Cazuri particulare: $a^1 = a$; $a^0 = 1$, oricare ar fi numărul natural a nenul.



Rețineți!

○ 0^0 nu are sens și $0^n = 0$, oricare ar fi $n \neq 0$.

Exemple: $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $12^2 = 144$; $30^2 = 900$; $7^2 = 49$, $41^2 = 1681$.

○ Numim **pătrat perfect** un număr natural obținut prin ridicarea la puterea a II-a a unui număr natural.

○ Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6, 9.

○ Un număr natural nu este pătrat perfect dacă se termină cu una din cifrele: 2, 3, 7 sau 8.

○ Numim **cub perfect** un număr obținut prin ridicarea la puterea a III-a a unui număr natural.

Exemple: $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$, ...

○ Pentru a scrie mai ușor numerele foarte mari este recomandabil să utilizăm puterile lui 10. (momentul nașterii universului, distanța dintre anumite corpuri cerești etc.)

Avem: $10 = 10^1$;

$1000000 = 10^6$ (un milion);

$100 = 10^2$ (o sută);

$10000000 = 10^7$ (zece milioane);

$1000 = 10^3$ (o mie);

$1000000000 = 10^9$ (un miliard);

$10000 = 10^4$ (zece mii);

$1000000000000 = 10^{12}$ (un bilion);

$100000 = 10^5$ (o sută de mii);

$1000000000000000 = 10^{15}$ (un trilion).

Să rezolvăm:

1. Scrieți sub formă de puteri cu exponent natural următoarele produse:

a) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$; b) $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13$; c) $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{100 \text{ factori}}$.

2. Calculați: a) $2^4 - 2$; b) $3^2 + 3$; c) $2^5 : 2^2$; d) $12 - 3^2$; e) $1 + 4^3$.

3. $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$.

Rezolvare: 1. a) 8^4 ; b) 13^5 ; c) 2^{100} .

2. a) $16 - 2 = 14$; b) $9 + 3 = 12$; c) $32 : 4 = 8$; d) $12 - 9 = 3$; e) $1 + 64 = 65$.

Atenție! Greșeli posibile: $12 - 3^2 = (12 - 3)^2 = 9^2 = 81$.

$$1 + 4^3 = (1 + 4)^3 = 5^3 = 125.$$

○ Ridicarea la putere este o operație de ordinul al treilea.

○ Dacă într-un exercițiu nu există paranteze, atunci întâi se efectuează ridicarea la putere.

3. Adunăm 1 la suma dată și avem:

$$(1 + 1) + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} =$$

$$= 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} =$$

$$= 2 \cdot 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} =$$

$$= (2^2 + 2^2) + 2^3 + \dots + 2^{10} =$$

$$= 2 \cdot 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} =$$

$$= (2^3 + 2^3) + 2^4 + \dots + 2^{10} =$$

$$= (2^4 + 2^4) + 2^5 + \dots + 2^{10} =$$

$$= (2^9 + 2^9) + 2^{10} =$$

$$= 2 \cdot 2^9 + 2^{10} =$$

$$= 2^{10} + 2^{10} =$$

$$= 2^{11}. \text{ Deci } a = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047.$$

$$(2 \cdot 2 = 2^2)$$

$$(2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^2 = 2^3)$$

$$(2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4)$$

$$(2^9 + 2^9 = 2 \cdot 2^9 = 2^{10})$$

Cum comparăm puterile?

Puteri care au aceeași bază

Să comparăm puterile 5^2 și 5^3 .

Figura a) conține $5^2 = 25$ de pătrățele, iar **figura c)** conține $5^3 = 125$ de cubulețe.

Deci numărul 5^2 este mai mic decât numărul 5^3 , adică $5^2 < 5^3$.

În general: Dacă m, n și a sunt numere naturale cu $a \neq 0$, $a \neq 1$ și $m < n$, atunci $a^m < a^n$.

Exemple: $7^4 < 7^5$; $8^3 < 8^{10}$; $2^3 < 2^{100}$.

Puteri cu același exponent

Să comparăm numerele 5^2 și 10^2 .

Figura a) conține $5^2 = 25$ de pătrățele, iar **figura b)** conține $10^2 = 100$ de pătrățele.

Deci numărul 5^2 este mai mic decât numărul 10^2 .

În concluzie: Dacă n, a și b sunt numere naturale nenule cu $a < b$, atunci $a^n < b^n$.

Exemple: $2^3 < 2^4$; $4^5 < 5^5$; $8^3 < 10^3$; $10^4 < 100^4$.

Să rezolvăm:

Să se compare puterile: a) 2^{30} cu 3^{20} ; b) 2^{50} cu 3^{30} ; c) 2^{30} cu 7^{10} ; d) 5^{12} cu 2^{28} .

Rezolvare:

Puterile care trebuie să le comparăm nu au nici aceeași bază, nici același exponent. Însă le putem scrie, astfel încât în fiecare caz puterile să aibă același exponent:

a) $2^{30} = (2^3)^{10}$ și $3^{20} = (3^2)^{10}$ sau $2^{30} = 8^{10}$ și $3^{20} = 9^{10}$. Cum $8 < 9$ rezultă $2^{30} < 3^{20}$.

b) $2^{50} = (2^5)^{10} = 32^{10}$ și $3^{30} = (3^3)^{10} = 27^{10}$. Cum $32 > 27$ rezultă $2^{50} > 3^{30}$.

c) $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$. Deci $2^{30} > 7^{10}$.

d) $5^{12} = (5^3)^4 = 125^4$ și $2^{28} = (2^7)^4 = 128^4$, deci $5^{12} < 2^{28}$.

EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Scrieți sub formă de puteri cu exponent natural următoarele produse:

- a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; d) $16 \cdot 16 \cdot 16$;
b) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; e) $1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$ (1000 factori);
c) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9$ (8 factori); f) $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (10 factori). (nota 5)

2. Scrieți ca produs de factori egali, cu exponentul unu următoarele puteri:

- a) 3^5 ; b) 1^4 ; c) 0^3 ; d) 10^5 ; e) 1997^2 ; f) 4^6 . (nota 5)

3. Precizați exponentul și baza fiecărei puteri:

- a) 7^4 ; b) 7^0 ; c) 0^{15} ; d) 2012^3 ; e) 14^{2012} ; f) 6^5 ; g) 8^8 ; h) 9^3 . (nota 5)

4. Scrieți puterea ce are:

- a) baza 5 și exponentul 3; d) baza 4 și exponentul 3;
b) baza 10 și exponentul 0; e) exponentul 2011 și baza 2012;
c) baza 10 și exponentul 10; f) exponentul 0 și baza 0. (nota 5)

5. Calculați:

- a) 2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 ; 2^6 ; ...; 2^{12} ;
b) 0^{1999} ; 1^{1999} ; 1999^0 ; 2000^1 ;
c) 8^3 ; 12^3 ; 3^4 ; 10^3 ; 10^5 ; 9^3 ;
d) 3^7 ; 11^2 ; 14^2 ; 30^3 ; 125^2 ; 303^1 ; 405^0 ;
e) 8^3 ; 12^2 ; 123^2 ; 0^{1997} ; 1^{1997} ; 1997^0 ;
f) 3^5 ; 3^6 ; 11^3 ; 13^2 ; 250^2 ;
g) 5^2 ; 5^3 ; 5^4 ; 15^2 ; 15^3 ;
h) 7^2 ; 7^3 ; 7^4 ; 17^2 ; 17^3 ;
i) 6^2 ; 6^3 ; 6^4 ; 16^2 ; 16^3 ;
j) 8^2 ; 18^2 ; 28^2 ; 38^2 ; 48^2 ;
k) 9^2 ; 19^2 ; 29^2 ; 39^2 ; 49^2 ;
l) 101^2 ; 102^2 ; 103^2 ; 104^2 ; 100^3 . (nota 7)

6. a) Fie șirul: 1; 2; 4; 8; 16; ... Care este al 50-lea termen din șir?

b) Fie șirul: 9; 27; 81; 243; 729; ... Care este al 57-lea termen din șir?

c) Fie șirul: 125; 625; 3125; ... Care este al 10-lea termen din șir?

7. Calculați: a) 11^2 ; b) 111^2 ; c) 1111^2 ; d) 11111^2 ; e) 111111^2 . Ce observați? (nota 9)

8. Calculați:

- a) $10^2 + 10^3 + 10^4$;
b) $10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4$;
c) $10^1 + 10^2 + 10^3$;
d) $10^0 + 10^2 + 10^4 + 10^6$;
e) $10 + 10^2 + 10^4 + 10^5$;
f) $10^0 + 10^2 + 10^4 + 10^6$.

9. Fără a efectua ridicările la putere, precizați cu câte zerouri se termină numerele:

- a) $2^4 \cdot 7^3 \cdot 5^3$; b) $2^5 \cdot 7^4 \cdot 5^3$; c) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$; d) $2^{2011} \cdot 11^4 \cdot 5^{2012}$. (nota 9)

10. Calculați:

- a) $5^2 - 3^2$;
b) $9^2 - 7^2$;
c) $11^2 - 6^2$;
d) $13^2 - 3^2$;
e) $25^2 - 15^2$;
f) $18^2 - 16^2$;
g) $19^2 - 11^2$;
h) $15^2 - 9^2$;
i) $29^2 - 11^2$;
j) $39^2 - 29^2$;
k) $31^2 - 11^2$;
l) $49^2 - 9^2$;
m) $18^2 - 8^2$;
n) $38^2 - 12^2$;
o) $102^2 - 98^2$;
p) $52^2 - 48^2$. (nota 7)

11. Calculați:

- a) $2 + 2^2 + 2^3$;
b) $5 + 5^2 + 5^3$;
c) $2 + 2 \cdot 2^2$;
d) $7 + 3 \cdot 3^3$;
e) $6 + 4 \cdot 4^2$;
f) $1 + 2^2 + 3^3 + 18^0$;
g) $10^0 + 10 + 10^2$;
h) $15^0 + 15^2$;
i) $(25 - 5 \cdot 5) : 44^{44}$;
j) $(125 - 3 \cdot 3^3) : 7^2 + 1999^0$;
k) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$;
l) $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4$;
m) $4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4$;
n) $5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4$;
o) $6^0 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4$;
p) $7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4$;
r) $10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4$. (nota 7)

12. Completați următorul tabel și încercați să rețineți rezultatele:

a	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
2							
3							
5							
6							

(nota 7)

13. Calculați:

- a) 1^{543} ; 0^{75} ; 2100^1 ; 7025^0 ;
b) 18^2 ; 11^3 ; 407^2 ;
c) 3^6 ; 5^5 ; 4^4 ; 10^7 ;
d) $7^2 - 3^3$;
e) $5^3 - 3^2$;
f) $11^2 + 7^2$;
g) $39^2 - 29^2$;
h) $52^2 - 48^2$;
i) $2 + 2^2 + 2^3$;
j) $5 + 5^3$;
k) $2 + 2 \cdot 2^2$;
l) $7 + 3 \cdot 3^3$;
m) $6 + 4 \cdot 4^2$;
n) $1 + 2^2 + 3^3 + 18^0$;
o) $2^4 + 3^2 + 1^5$;
p) $2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^3$. (nota 7)

14. Calculați:

- a) $1^0 + 3^4 + 0^5 + 1^{43} + 73^0$;
b) $1^{2^3} + 2^{1^3} + 3^{2^1}$;
c) $5^{4^0} + 0^{5^4} + 5^{0^4}$;
d) 103^2 ;
e) $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 - 120$;
f) 2^{10} ;
g) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4$;
h) $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 3$;
i) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2$;
j) $1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 4^3$;
k) $11 \cdot 10^2 + 10 \cdot 9^2 + 9 \cdot 8^2$;
l) $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4$;
m) $5^0 + 5^5 + 5^{55} + 5^{555}$;
n) $4^4 - 3^3 - 2^2 - 1$. (nota 7)

15. Calculați:

- a) $3^4 - 9^2$;
b) $30^2 : 5^2$;
c) $6^2 - 2 \cdot 4^2$;
d) $5^3 - 1^{100}$;
e) $5 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 - 12$;
f) $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$;
g) $(3 + 7)^3 - (5 - 4)^9$;
h) $\left[(3^2 + 4^2)^2 : 25 \right]^2 - 3^4 - 5^2$;
i) $(4^2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3) : (2^3 \cdot 71)$;
j) $\{ 2 \cdot [2 \cdot (2^3 - 3) - 3] - 3 \} - 3$;
k) $\{ 3 \cdot [3 \cdot (3^4 - 4) - 4] - 4 \} - 4$;
l) $4 \cdot \{ 4 \cdot [4 \cdot (4^2 - 5) - 5] - 5 \} : 151 - 151^0$;
m) $5 \cdot \{ 5 \cdot [5 \cdot (5^2 - 3^2) - 4^2] - 15^2 \} : 19 - 5^2$;
a) $\rightarrow$ g) (nota 7); h) $\rightarrow$ m) (nota 9)

16. a) Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abc}$, astfel încât $\overline{a^a} = \overline{bc}$.

b) Să se determine numărul natural de forma $\overline{xyzxt}$ care satisface condiția: $\overline{xyzxt} = \overline{xx}^x$.
(nota 10)

17. Determinați numărul natural n care verifică fiecare egalitate:

- a) $n^2 = 49$; g) $12^2 + n^2 = 13^2$; m) $n : (3^3)^2 = 1$;
b) $n^2 = 900$; h) $n^2 - 5^2 = 12^2$; n) $(4^n)^3 = 4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^4$;
c) $n^3 = 64$; i) $n^2 : 3^2 = 4^2$; o) $3^n + 3^{n-1} = 6^2$;
d) $n^3 = 125$; j) $576 : n = 2^4 \cdot 3^2$; p) $7 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n = 64$;
e) $n^3 = 1000$; k) $n - 3^3 = 6^3$; r) $5^n + 5^{n-1} + 5^{n-2} = 12^2 + 3^2 + 2^1$;
f) $6^2 + n^2 = 10^2$; l) $(3^2)^{n+2} = 3^n \cdot 3^8$; s) $6^{n-1} + 6^{n-2} + 6^{n-3} + 6^{n-4} = 2^8 + 2 + 1$.

a) $\rightarrow$ k) (nota 9); l) (nota 10); m), n) (nota 9); o) $\rightarrow$ r) - (nota 10)

18. Să se afle x din relațiile: a) $1 + 2 \cdot \{3^2 + 7 \cdot [5^4 - 4 \cdot (x - 3 \cdot 5^4)]\} + 1993^0 = 1994$;
b) $2^2 \cdot [2^2 \cdot 3^4 \cdot (1 + 2^3 \cdot x) - 3^6] - 3^7 = 3^8$.
(nota 9)

19. Comparați numerele:

- a) 1^5 și 1^5 ; c) 1^0 și 1^{100} ; e) 0^{50} și 1^5 ; g) 5^6 și 5^5 ;
b) 1^{101} și 1^{2001} ; d) 0^{30} și 0^{40} ; f) 17^0 și 1^7 ; h) 11^{11} și 11^{10} .
(nota 7)

20. Comparați numerele:

- a) 80^{10} și 80^9 ; d) 120^{121} și 121^{121} ; g) $(11^2)^8$ și $(11^2)^7$;
b) 120^8 și 120^6 ; e) 45^{45} și 43^{45} ; h) 4^9 și 4^8 ;
c) 2008^3 și 2008^2 ; f) 2008^4 și 2007^4 ; i) 42^6 și 42^7 .
(nota 7)

21. Completați spațiile $\square$ cu „<”, „>” sau „=”:

- a) $2^7 \square 2^5$; b) $5^2 \square (4^2 + 3^2)$; c) $(2 \cdot 3)^4 \square 2^4 \cdot 3^4$.
(nota 7)

22. Ordonăți crescător numerele: a) 2^3 ; 2^7 ; 4^3 ; 32 ; 2^8 ; b) 3^3 ; 9^2 ; 3 ; 9^3 ; 3^2 .
(nota 7)

23. Comparați numerele: a) 3^{2^3} cu $(3^2)^3$; b) 5^{3^2} cu $(5^3)^2$; c) 7^{30} cu 49^{15} ; d) $(2^6)^2$ cu 2^{2^6} . (nota 9)

24. Determinați numerele naturale n știind că:

- a) $3^n < 2^6$; c) $2^n = 4^3$; e) $7^n = 1$; g) $\left[(3^4)^3\right]^n = 3^{24}$;
b) $3^n = 7^n$; d) $3^{2n} < 9^3$; f) $5^{n+2} = 5^4$.
(nota 10)

25. Aflați numărul natural x știind că:

- a) $2 \leq x^2 \leq 10$; d) $3^2 < 2^x < 8^2$; g) $5^2 < 3^x < 4^3$;
b) $100 \leq x^2 \leq 122$; e) $4^2 < 2^x < 7^2$; h) $4^2 < 5^x < 6^2$;
c) $80 \leq x^2 \leq 101$; f) $5^2 \leq 3^x < 9^2$; i) $6 < 7^x < 5^0$.
(nota 10)

26. Comparați numerele:

- a) 2^{33} și 3^{33} ; d) 3^{3003} și 27^{1001} ; f) 2^{3^5} și 9^{9^2} ;
b) 5^{405} și 4^{405} ; e) 2^{5^2} și $3^{3^5} - 9^{17}$; g) 3^{70} și 2^{10^5} ;
c) 4^{101} și 3^{202} ;
a), b) - (nota 9); c) $\rightarrow$ g) - (nota 10)

27. Unui anumit soi de cactus îi crește după 8 luni câte 3 „frunze” pe una pe care o are deja. Câte astfel de frunze ar avea un cactus de acest fel peste 4 ani dacă acum are 5 frunze?



I.8. Pătratul și cubul unui număr natural;

pătrate perfecte, cuburi perfecte.

Ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect



Rețineți!

- Un număr natural **pătrat perfect** este de forma: $3k$ sau $3k+1$; $4k$ sau $4k+1$; $5k$ sau $5k+1$ sau $5k+4$; $6k$ sau $6k+1$ sau $6k+3$ sau $6k+4$, unde k este număr natural etc.
- Numerele naturale de forma $3k+2$, $4k+2$, $4k+3$, $5k+2$, $5k+3$, $6k+2$, $6k+5$, unde k este număr natural nu sunt pătrate perfecte.
- Un număr natural nu este **pătrat perfect** dacă este cuprins între două pătrate perfecte consecutive.

De exemplu: 30 nu este pătrat perfect pentru că $25 < 30 < 36$.

Un număr natural nu este **cub perfect** dacă este cuprins între două cuburi perfecte consecutive.

De exemplu: 100 nu este cub perfect pentru că $64 < 100 < 125$.

Un număr natural care are cifra unităților 2, 3, 7 sau 8 nu este pătrat perfect.

Ultima cifră a unui număr natural

Notăție. Notăm cu $U(n)$, ultima cifră a numărului natural n .

Dacă k este număr natural nenul atunci avem:

$$\begin{aligned} U(2^{4k}) &= U(2^4) = 6; & U(4^{2k}) &= U(4^2) = 6; \\ U(2^{4k+1}) &= U(2^1) = 2; & U(4^{4k+1}) &= U(4^1) = 4; \\ U(2^{4k+2}) &= U(2^2) = 4; & U(5^k) &= 5; \\ U(2^{4k+3}) &= U(2^3) = 8; & U(6^k) &= 6; \\ U(3^{4k}) &= U(3^4) = 1; & U(7^{4k}) &= U(7^4) = 1; \\ U(3^{4k+1}) &= U(3^1) = 3; & U(7^{4k+1}) &= U(7^1) = 7; \\ U(3^{4k+2}) &= U(3^2) = 9; & U(7^{4k+2}) &= U(7^2) = 9; \\ U(3^{4k+3}) &= U(3^3) = 7; & U(7^{4k+3}) &= U(7^3) = 3. \end{aligned}$$

Exerciții rezolvate:

$$U(1347)^{26} = U(7^{26}) = U(7^{6 \cdot 4 + 2}) = U(7^2) = 9.$$

$$U(17232^{123}) = U(2^{123}) = U(2^{4 \cdot 30 + 3}) = U(2^3) = 8.$$

$$U(127 \cdot 39)^{13} = U(127^{13}) \cdot U(39^{13}) = U(7^{13}) \cdot U(9^{13}) = U(7^{4 \cdot 3 + 1}) \cdot U(9^{4 \cdot 3 + 1}) = U(7^1) \cdot U(9^1) = \\ = U(7 \cdot 9) = 3.$$

EXERCIIII ȘI PROBLEME

1. a) Care din următoarele numere sunt pătrate perfecte: 64 ; 80 ; 3^5 ; 3^6 ; 2^4 ; 15^6 ; 17^5 ; $3 \cdot (2^4 + 2^5)$; $2^4 + 3^2$; $3^5 + 3^6$; $5^6 + 7 \cdot 5^7$; 7^{12} ; 5^9 ; $6^{2n} + 8 \cdot 6^{2n+1}$, unde n este număr natural; $1^0 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$?

b) Care din următoarele numere sunt cuburi ale unor numere naturale:

$$\begin{array}{ccccccc} 7^6; & 64; & 1000; & 2 \cdot 3^2 + 3^2; & 2^3 + 2^2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^2 + 3^3; & & \\ 5^3; & 28; & 13^7; & 3^6 + 7 \cdot 3^8; & 7^{3n} ? & & \end{array}$$

(nota 7)

2. Scrieți pătrate perfecte de două cifre.

(nota 7)

3. Scrieți pătrate perfecte cuprinse între 200 și 700.

(nota 7)

4. Scrieți pătrate perfecte de patru cifre, ce au ultima cifră zero.

(nota 9)

5. Scrieți cuburile perfecte mai mici ca 200. (nota 9)
6. Scrieți cuburile perfecte ce au 3 cifre. (nota 9)
7. Scrieți cuburile perfecte de 5 cifre care au ultima cifră zero. (nota 9)
8. Determinați numerele $\overline{ab}$ astfel încât numărul $N = \overline{ab} + \overline{ba}$ să fie pătrat perfect. (nota 9)
9. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, $a < b < c$ astfel încât numărul $N = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ba} + \overline{cb} + \overline{ac}$ este: a) pătrat perfect; b) cub perfect. (nota 9)
10. Este adevărat că oricare ar fi numărul natural n , numărul $n^2 + 17$ este pătrat perfect? (nota 10)
11. Să se arate că numerele $N = 1997 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1996)$ și $P = 1 + 3 + 5 + \dots + 1997$ sunt pătrate perfecte. Generalizare. (nota 10)
12. Demonstrați că numărul $A = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$ este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n . (nota 10)
13. Numerele 6, 8, 10 se numesc numere pitagoreice pentru că au proprietatea $6^2 + 8^2 = 10^2$. Arătați că există o infinitate de triplete de numere pitagoreice, adică ecuația $x^2 + y^2 = z^2$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale. (nota 10)
14. Arătați că numerele 25, 34, 41, 65 și 130 se pot scrie ca sumă a două pătrate perfecte și nenule. (nota 10)
15. Să se arate că numerele: $a = 1997^1 + 1997^2 + 1997^3 + 1997^4 + 1997^5$ și $b = 1990 + 1991^1 + 1992^2 + 1993^3 + 1994^4 + 1995^5 + 1996^6 + 1997^7$ nu sunt pătrate perfecte. (nota 10)
16. Să se arate că numărul $N = 5 \cdot 2^n + 3$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural. (nota 9)
17. Să se arate că numărul $n = 1^{1997} + 2^{1997} + \dots + 1997^{1997}$ nu este pătrat perfect. (nota 9)
18. Să se arate că numărul $n = 2^{1999} - 2^{1998} - 2^{1997} - 2^{1996}$ este pătrat perfect. (nota 10)
19. Demonstrați că numerele de forma: $N = 5(n+1) + 6^{n+2} + 1001^{n+3} + 5$, unde n este număr natural, nu pot fi pătrate perfecte. (nota 10)
20. Arătați că numărul 169 poate fi scris ca sumă a trei pătrate perfecte. (nota 10)
21. Să se arate că numărul: $N = 111^2 + 222^2 + 333^2 + 444^2 + 555^2 - 12\,345$ nu este pătrat perfect. (nota 10)
22. Determinați numărul natural n , astfel încât numărul $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 58$ să fie pătrat perfect. (nota 10)
23. Numărul $N = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2002 + 2003$ este pătrat perfect? (nota 10)
24. Numărul de forma $\overline{aa}$ este pătrat perfect? (nota 10)
25. Arătați că numărul de forma $\overline{aaa}$ nu este pătrat perfect. (nota 7)
26. Arătați că numărul $N = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2005$ este pătrat perfect. (nota 10)
27. Arătați că diferența dintre un număr natural de trei cifre distincte și răsturnatul său nu poate fi pătrat perfect. (nota 10)
28. Fie numărul natural $n = 1005^4 + 2004^4 + 3003^4 + 4002^4 + 5001^4 + 1$. Să se afle ultimele trei cifre ale numărului n și să se arate că n nu este pătrat perfect. (nota 10)

29. Fie numerele x și y cu proprietățile: $x - 9 = 8 \cdot (9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{n-1})$ și $y - 12 = 4 \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n)$. Să se demonstreze că x este pătrat perfect, iar y nu este pătrat perfect. (nota 10)

30. a) Să se arate că $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, oricare ar fi numerele naturale a și b cu $a > b$. b) Să se arate că numărul $N = 1997 + 2 \cdot 1998 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1996)$ este cub perfect. (nota 10)

31. Determinați ultima cifră a numerelor: 8^{4k} , 8^{4k+1} , 8^{4k+2} , 8^{4k+3} , unde k este un număr natural nenul. (nota 10)

32. Determinați ultima cifră a numerelor: a) $2347 \cdot 1488$; b) 2^{475} ; c) 3^{479} ; d) 4^{573} ; e) 5^{47} ; f) 6^{1977} ; g) 7^{753} ; h) 8^{378} ; i) 9^{51} . (nota 10)

33. Determinați ultima cifră a numerelor: a) 1972^{1973} ; b) 1973^{1972} ; c) 1974^{1973} ; d) 1975^{1977} ; e) 1976^{1975} ; f) 1977^{1978} ; g) 1978^{1979} . (nota 10)

34. Se consideră șirul de numere: 1, 3, 7, 15, 31, 63, Aflați ultima cifră a numărului de pe locul 1997. (nota 10)

35. Să se determine ultimele 1997 cifre ale numărului 1990^{1996} . (nota 10)

36. Să se afle ultimele 1993 cifre ale numărului 1990^{1992} . (nota 10)

37. Determinați ultima cifră a numerelor: a) $a = 1997^{4n+1} + 1999^{2n+1} + 2001^n + 2005^{2n}$, unde n este număr natural; b) $b = 12^n + 23^{n+1} + 34^{n+2} + 45^{n+3}$, unde n este număr natural nenul. (nota 10)

38. Precizați în câte zerouri se termină numărul n și care este ultima sa cifră diferită de zero dacă: a) $n = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 17^8$; b) $n = 4^{999} \cdot 35^{2000} \cdot 3^9$; c) $n = 16^2 \cdot 15^{80} \cdot 32^{15} \cdot 1997^{1242}$. (nota 10)

39. Aflați cifra unităților numărului $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 999 \cdot 1000 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 997 \cdot 999$. (nota 10)

40. Se dau numerele $a = 5^8 \cdot 7^3 \cdot 11^2$ și $b = 2^{14} \cdot 7^3 \cdot 11^{12}$. Cu câte zerouri se termină numărul $a \cdot b$ și care este ultima cifră diferită de zero a acestui produs? (nota 10)

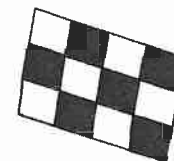
41. Fie numerele: $a = 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{1996}$ și $b = 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{1997}$. Aflați cifra unităților numerelor $a + b$ și $a \cdot b$. (nota 10)

42. Aflați ultima cifră a numărului $n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 + \dots + 95 \cdot 97 \cdot 99 \cdot 101$. (nota 10)

43. Aflați ultima cifră a numărului $n = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + \dots + 1997 \cdot 1998 \cdot \dots \cdot 3993$. (nota 10)

44. Aflați ultima cifră a numărului $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + 98 \cdot 99 \cdot 100$. (nota 10)

45. Vecinul nostru are 135 dale pătrate, de granit. Vrea să acopere în curte o suprafață cât mai mare de forma unui pătrat. A spus că dacă îi rămân dale neutilizate, o să ne dea și nouă. Câte dale am putea primi noi? (nota 10)



Completați spațiile punctate:

1. Rezultatul calculului 24^2 este egal cu ... (5 p) (nota 5)
 2. Rezultatul calculului 6^3 este egal cu... (5 p) (nota 5)
 3. Rezultatul calculului $2^3 - 1^{2004} + 1997^0$ este egal cu... (5 p) (nota 5)
 4. Rezultatul calculului $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ este egal cu... (5 p) (nota 5)
 5. Efectuați:
 - a) $19^0 + 17 - (17 - 16)^2$; b) $2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 7 - 2^2 \cdot 9$; (10 p) (nota 5)
 - c) $8^2 - 7^2 \cdot 7^0 - 15$; d) $(8^2 + 6^2) : (3^2 + 4^2)$. (10 p) (nota 5)
 6. Se dau numerele: $a = [(2^2 - 3) \cdot 7 + 7^2] : 2^3$; $b = (29^2 - 12^2 \cdot 5) : 121$; $c = (5^3 - 8^2 - 7 \cdot 5 - 1^{2004}) : 5^2$. Calculați $a^b + a^c$. (10 p) (nota 7)
 7. Se dau numerele: $a = [(12^2 - 10^2) : 11 - 1^{2004}] : 3 - 2004^0$; $b = [(3^4 - 2^6 \cdot 2) : 7 - 6]^{2003}$. Calculați: a^b ; b^a ; $a + b$; $b - a$. (10 p) (nota 7)
 8. a) Calculați: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$. (10 p) (nota 9)
 - b) Arătați că numărul $N = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$ este pătratul unui număr natural. (10 p) (nota 9)
 9. Ordonați crescător numerele: 3^{2002} ; 3^{2001} ; 2^{2001} . (10 p) (nota 10)
- Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

1. Calculați:
 - a) $2^3 + 3^2 + 4^2$; (10 p) (nota 5)
 - b) $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$; (10 p) (nota 5)
 - c) $0^{2005} + 2007^0 + 2007^2$; (10 p) (nota 5)
 - d) $(2^2)^3$. (10 p) (nota 5)
 2. Dacă $a = 5^2 - 2^4$ și $b = 3^4 - 2^6$, atunci $a + b$ este egal cu ... (5 p) (nota 7)
 3. Ordonați crescător numerele:
 - a) 5^{103} ; 5^{242} ; 5^{101} ; 5^{204} ; 5^{107} . (5 p) (nota 7)
 - b) 8^{100} ; 5^{100} ; 17^{100} ; 2^{100} ; 9^{100} . (5 p) (nota 7)
 4. Dacă $x + 2y = 9$ și $3x + 5y = 23$, calculați $4x + 7y$. (5 p) (nota 7)
 5. Calculați: a) $6 + 2 \cdot [(2 \cdot 5^3 - 2^3 \cdot 54 : 3^3 + 2 \cdot 5) : 2^2]$; (5 p) (nota 9)
 - b) $(57^2 - 1) \cdot (57^2 - 2) \cdot (57^2 - 3) \cdot \dots \cdot (57^2 - 57^2)$. (5 p) (nota 9)
 6. Aflați x din egalitatea: $2 \cdot 5^2 - 5 \cdot [3^2 + 5 - 3 \cdot (2x - 2004^0)] = 5^2$. (10 p) (nota 9)
 7. Arătați că numărul $N = 2005 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2004)$ este pătratul unui număr natural. (5 p) (nota 10)
 8. Dacă $N = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2007}$, scrieți ca putere a lui 2 numărul $N + 2$. (5 p) (nota 10)
- Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

I.9. Împărțirea, cu rest zero, a numerelor naturale când împărțitorul are mai mult de o cifră. Împărțirea cu rest a numerelor naturale



Să recapitulăm:

Împărțitorul are o singură cifră.

Cum efectuăm împărțirea cu rest zero?



☆ Oana aduce la școală 12 balonașe pentru serbare. Are la dispoziție 3 suporturi și prinde balonașele de acestea astfel încât să fie același număr de baloane pe fiecare suport. Câte balonașe prinde Oana pe fiecare suport?

Rezolvare:

După ce Oana pune câte un balonaș pe fiecare suport mai rămân:

pas 1: $12 - 3 = 9$ balonașe;

pas 3: $6 - 3 = 3$ balonașe;

pas 2: $9 - 3 = 6$ balonașe;

pas 4: $3 - 3 = 0$ balonașe.

Deci după 4 pași Oana a terminat de aranjat balonașele.

Pe fiecare suport a așezat câte 4 balonașe și spunem că 4 reprezintă câtul împărțirii lui 12 la 3.

⇒ Avem:

$$\begin{array}{c} 12 : 3 = 4 \rightarrow \text{cât (c)} \quad 4 \cdot 3 = 12 \\ \text{deîmpărțit (d)} \quad \text{împărțitor (i)} \quad d = i \cdot c \end{array}$$

Concluzie: Împărțirea este o scădere repetată.

Dacă Oana ar fi adus 54 de balonașe, câte ar fi pe un suport?

$$\begin{array}{r} 54 : 3 = 18 \\ 3 \overline{) 54} \\ \underline{3} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 : 3 = 18 \\ 3 \overline{) 54} \\ \underline{3} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

pas 1: 3 se cuprinde în cifra zecilor odată și rămâne restul 2 (zeci).

pas 2: se coboară 4 cifra unităților și se obține numărul 24 ($2 \cdot 10 + 4$); 3 se cuprinde în 24 de 8 ori.

Răspuns: Pe un suport sunt 18 balonașe.

Alt exemplu:

$$\begin{array}{r} 2368 : 8 \\ 8 \overline{) 2368} \\ \underline{16} \\ 76 \\ \underline{76} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

pas 1: 2 care reprezintă numărul miilor nu se poate împărți la 8. Numărul are 23 de sute. Împărțim numărul sutelor la 8; $23 : 8$ și obținem câtul 2 și restul 7 (sute).

pas 2: Transformăm restul 7 (sute) în zeci și adăugăm 6 zeci de la deîmpărțit. $7 \cdot 10 + 6 = 76$ zeci. Împărțim numărul zecilor la 8; $76 : 8$ și obținem câtul 9 și restul 4.

pas 3: Transformăm restul 4 (zeci) în unități și adunăm 8 unități de la deîmpărțit. $4 \cdot 10 + 8 = 48$ unități. Împărțim numărul unităților la 8; $48 : 8$ și obținem câtul 6 și restul 0.

Proba:

$$296 \cdot 8 = 2368$$

Împărțitorul are două cifre

☆ Să calculăm $6480 : 48$.

pasul 1: Împărțim numărul sutelor 64 la 48.

♦ Obținem câtul 1 și restul 16 sute.

$$\begin{array}{r} 6480 : 48 \\ 48 \overline{) 6480} \\ \underline{48} \\ 16 \end{array}$$

pasul 2: Transformăm sutele rămase în zeci și le adunăm cu zecile deîmpărțitului (8).

♦ 16 sute = 160 zeci și 160 zeci + 8 zeci = 168 zeci.

♦ Împărțim 168 zeci la 48 și obținem câtul 3 și restul 24 (zeci).

$$\begin{array}{r|l} 6480 & 48 \\ \underline{48} & 135 \\ 168 & \\ \underline{144} & \\ 240 & \\ \underline{240} & \\ 0 & \end{array}$$

pasul 3: ♦ Transformăm zecile rămase în unități și le adunăm cu unitățile deîmpărțitului 0.

♦ Obținem $24 \cdot 10 + 0 = 240$ unități.

♦ Împărțim 240 de unități la 48 și obținem câtul 5 și restul 0.

Răspuns: $6480 : 48 = 135$.

Proba: $48 \cdot 135 = 6480$

În general: $i \cdot c = d$

Împărțitorul are trei cifre

♦ Să efectuăm $52626 : 147$

pasul 1: $526 = 147 \cdot 3 + 85$

pasul 2: $85 \cdot 100 + 2 = 852$

pasul 3: $117 \cdot 10 + 6 = 1176$

$1176 = 147 \cdot 7 + 0$

$$\begin{array}{r|l} 52626 & 147 \\ \underline{441} & 358 \\ 85 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 52626 & 147 \\ \underline{441} & 358 \\ 852 & \\ \underline{735} & \\ 117 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 52626 & 147 \\ \underline{441} & 358 \\ 852 & \\ \underline{735} & \\ 1176 & \\ \underline{1176} & \\ 0 & \end{array}$$

Răspuns: $52626 : 147 = 358$ Proba: $147 \cdot 358 = 52626$

Rețineți! ♦ Împărțirea care dă restul zero se numește împărțire exactă.

♦ $0 : n = 0$, pentru orice număr natural nenul n .

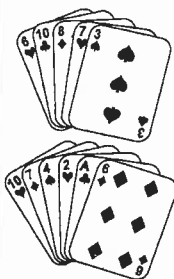
♦ $0 : 0$ nu are sens (nu este definită)

♦ Proba împărțirii am efectuat-o prin înmulțire, iar proba înmulțirii poate fi realizată prin împărțire, de aceea spunem că împărțirea este operația inversă înmulțirii.

În concluzie:

Spunem că numărul natural d se împarte exact la numărul natural nenul i ($i \neq 0$), dacă există un număr natural c , astfel încât $d = i \cdot c$. Notăm $d : i = c$.

Împărțirea cu rest a numerelor naturale

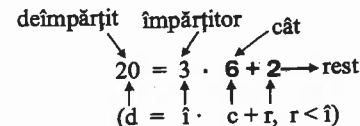


Să observăm:

♦ Dacă împărțim 20 de cărți de joc la 4 copii, astfel încât toți copiii să primească același număr de cărți, un copil va primi 5 cărți.

Avem $20 : 4 = 5$

♦ Dacă un copil nu joacă, atunci cele 20 de cărți se vor distribui ca în figura de mai sus.



Avem:

$$20 : 3 = 6$$

$$6 \cdot 3 = 18 \rightarrow 18$$

$$\underline{18}$$

$$2$$

În concluzie: Un copil va primi 6 cărți, iar din pachetul inițial de 20 de cărți rămân două cărți nefolosite.

Cum efectuăm împărțirea cu rest a numerelor naturale?

Împărțitorul are trei cifre

$45091 : 126 = ?$ Cum calculăm?

pas 1: Împărțim numărul sutelor (450) la 126.

♦ Obținem câtul 3 și restul 72.

$$\begin{array}{r|l} 45091 & 126 \\ \underline{378} & 357 \\ 72 & \end{array}$$

pas 2: – Coborâm cifra zecilor, pe 9.

♦ Împărțim numărul zecilor

($72 \cdot 10 + 9 = 729$ zeci) la 126 și obținem câtul 5 și restul 99.

$$\begin{array}{r|l} 45091 & 126 \\ \underline{378} & 357 \\ 729 & \\ \underline{630} & \\ 99 & \end{array}$$

pas 3: Coborâm cifra unităților, pe 1.

♦ Împărțim numărul unităților $99 \cdot 10 + 1 = 991$ la 126 și obținem câtul 7 și restul 109.

$$\begin{array}{r|l} 45091 & 126 \\ \underline{378} & 357 \\ 729 & \\ \underline{630} & \\ 991 & \\ \underline{882} & \\ 109 & \end{array}$$

Avem: $45091 = 126 \cdot 357 + 109$

$$(d = i \cdot c + r, r < i)$$

Proba: $i \cdot c + r = d$ ($r < i$)

$$\begin{array}{r} 126 \cdot \\ \underline{357} \\ 882 \\ 630 \\ \underline{378} \\ 44982 \end{array}$$

$44982 + 109 = 45091$.

Alt exemplu: Să calculăm $182540 : 873 = ?$

pas 1: Numărul sutelor, pe 1825 îl împărțim la 873 și obținem câtul 2 și restul 79.

pas 2: Coborâm cifra zecilor, pe 4 și obținem 794 de zeci. 873 se cuprinde în 790 de zero ori.

$$\begin{array}{r|l} 182540 & 873 \\ \underline{1746} & 209 \\ 794 & \end{array}$$

pas 3: Coborâm cifra unităților, pe 0 și împărțim numărul unităților pe 7940 la 873. Obținem câtul 9 și restul 83.

$$\begin{array}{r|l} 182540 & 873 \\ \underline{1746} & 209 \\ 7940 & \\ \underline{7857} & \\ 83 & \end{array}$$

Proba:

$$\begin{array}{r} 873 \cdot \\ \underline{209} \\ 7857 \\ \underline{1746} \\ 182457 \end{array}$$

$182457 + 83 = 182540$.

Deci: $182540 = 873 \cdot 209 + 83$, unde $83 < 209$

În general: $(d = i \cdot c + r, \text{ unde } r < i)$

Oricare ar fi numerele naturale d și i , unde $i \neq 0$, există numerele naturale c și r , unice, astfel încât: $d = i \cdot c + r$, unde $r < i$. Această relație o numim **teorema împărțirii cu rest** a numerelor naturale. d – deîmpărțit; i – împărțitor; c – cât; r – rest.

Probleme rezolvate:

1. Aflați numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul 4.

Rezolvare:

Numerele sunt de forma $6 \cdot 4 + r$, unde $r < 6$, adică r ia valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5 și numerele sunt: $6 \cdot 4 = 24$; $6 \cdot 4 + 1 = 25$; $6 \cdot 4 + 2 = 26$; $6 \cdot 4 + 3 = 27$; $6 \cdot 4 + 4 = 28$ și $6 \cdot 4 + 5 = 29$.

2. Să se determine numerele naturale care împărțite la un număr de o cifră să dea câtul 9 și restul 7.

Rezolvare:

Împărțitorul având o cifră și restul fiind 7, atunci împărțitorul poate fi 8 sau 9 și numerele sunt: $8 \cdot 9 + 7 = 79$ și $9 \cdot 9 + 7 = 88$.

3. Determinați deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul unei împărțiri știind că deîmpărțitul este cu 6 mai mare decât restul.

Rezolvare:

Din relațiile $d = c \cdot i + r$, unde $r < i$ și $d = 6 + r$ rezultă $c \cdot i = 6$.

Cum $c \cdot i = 1 \cdot 6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ putem avea:

$i = 1$ și $c = 6$ implică $r = 0$ și $d = 6$.

$i = 2$ și $c = 3$ implică $r = 0$ sau $r = 1$ și $d = 2 \cdot 3 = 6$ sau $d = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

$i = 3$ și $c = 2$ implică $r = 0$ sau $r = 1$ sau $r = 2$ și, respectiv, $d = 3 \cdot 2 = 6$; $d = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ și $d = 3 \cdot 2 + 2 = 8$.

$i = 6$ și $c = 1$ implică r ia valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5 și d ia respectiv, valorile 6, 7, 8, 9, 10, 11.

4. Victor vrea să aranjeze 24 de mașinuțe în cutii, în așa fel încât în fiecare cutie să fie același număr de mașinuțe. Dacă în fiecare cutie Victor așază cel puțin două mașinuțe, aflați de câte cutii are nevoie Victor și care este conținutul lor. Analizați toate cazurile.

Rezolvare:

Se observă că $24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Deci Victor are nevoie de 2, 3, 4, 6, 8 sau 12 cutii. Dacă așază mașinuțele în două cutii, atunci fiecare cutie va conține 12 mașinuțe, dacă așază mașinuțele în 12 cutii, atunci fiecare cutie va conține câte două mașinuțe etc.

5. Aflați restul și câtul împărțirii numărului $n = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 + 2012$ la 1001.

Rezolvare:

Rețineți! $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

$n = (6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13) + 1001 \cdot 2 + 10 = (6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 + 2) \cdot 1001 + 10$.

Câtul este $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 + 2$, iar restul este 10.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

1. Scrieți câte două împărțiri cu restul 2 și împărțitorul:

a) 3; b) 4; c) 21; d) 132; e) 4732; f) 1030.

(nota 5)

2. Scrieți câte două împărțiri cu restul 13 și împărțitorul:

a) 15; b) 20; c) 40; d) 108; e) 412; f) 12300.

(nota 5)

3. Calculați:

a) $65 : 5$;

f) $924 : 4$;

k) $335 : 67$;

p) $67\ 898 : 34$;

b) $128 : 8$;

g) $65 : 13$;

l) $924 : 12$;

r) $101\ 088 : 432$;

c) $222 : 6$;

h) $128 : 16$;

m) $324 : 18$;

s) $138\ 125 : 625$;

d) $165 : 3$;

i) $222 : 37$;

n) $405 : 45$;

ș) $33\ 225 : 75$;

e) $335 : 5$;

j) $165 : 55$;

o) $1\ 302 : 42$;

t) $444\ 150 : 225$. (nota 5)

4. Calculați:

a) $78 : 6$;

f) $956 : 4$;

k) $24500 : 25$;

q) $2645 : 115$;

b) $144 : 9$;

g) $420 : 12$;

l) $1908 : 36$;

r) $9776 : 208$;

c) $111 : 3$;

h) $1168 : 16$;

m) $71892 : 36$;

s) $47880 : 315$;

d) $385 : 7$;

i) $1081 : 23$;

o) $36326 : 82$;

t) $101088 : 432$;

e) $336 : 7$;

j) $1333 : 43$;

p) $3015 : 67$;

u) $137904 : 624$. (nota 5)

5. Aflați câtul și restul următoarelor împărțiri:

a) $234 : 8$;

e) $5713 : 12$;

i) $28321 : 120$;

b) $573 : 5$;

f) $6735 : 18$;

j) $48563 : 125$;

c) $202 : 3$;

g) $4262 : 25$;

k) $71428 : 150$;

d) $4125 : 7$;

h) $21503 : 82$;

l) $21968 : 225$. (nota 5)

6. Aflați câtul și restul următoarelor împărțiri:

a) $343 : 9$;

d) $21012 : 23$;

g) $2314 : 24$;

b) $452 : 11$;

e) $3171 : 29$;

h) $4513 : 103$;

c) $4123 : 21$;

f) $31700 : 800$;

i) $30015 : 307$. (nota 5)

7. Verificați dacă operațiile de mai jos sunt corect efectuate:

a) $64\ 729 + 26\ 324 = 114\ 100$;

c) $26\ 312 \cdot 54 = 1\ 420\ 800$;

b) $526\ 324 - 526\ 149 = 175$;

d) $2\ 004 : 12 = 167$. (nota 5)

8. Aflați numărul natural n , știind că:

a) $3 \cdot n = 39$;

f) $n : 8 = 24$;

k) $9 \cdot (11 - n) = 81$;

b) $4 \cdot n = 2012$;

g) $n : 9 = 8$;

l) $2 \cdot (20 + 10n) : 30 = 6$;

c) $5 \cdot n = 21$;

h) $(12 + n) : 4 = 16$;

m) $3 \cdot (9 - 2n) = 9$;

d) $25 : n = 5$;

i) $4 \cdot (3 - n) = 8$;

n) $(4 - n) \cdot (5 - n) = 12$;

e) $70 : n = 14$;

j) $6 \cdot (5 + 2n) = 30$;

o) $(2 \cdot n - 1) \cdot (4 - n) = 6$.

9. Aflați numărul natural n , știind că:

a) $n \cdot 5 < 10$

d) $(4 - n) \cdot 2 < 11$;

g) $(9n + 15) : 3 < 20$;

b) $3 \cdot n < 7$;

e) $n : 3 < 4$;

h) $2 \cdot (n - 2) > 6$;

c) $5(n + 3) < 21$;

f) $(3 + 4n) \cdot 12 < 144$;

i) $4n + 7 < 5n$.

10. Dacă a este deîmpărțitul, b este împărțitorul, c este câtul și r este restul să se completeze tabelul:

	a	b	c	r
a)	430	13		
b)	217		11	
c)	90			5
d)		4	3	
e)		2	21	

(nota 7)

11. **Problemă aplicativă.** Un camion cu capacitatea de 7 tone trebuie să transporte 56 tone de marfă. Câte transporturi face? Dar dacă trebuie să transporte 53 tone de marfă? (nota 7)



12. **Problemă aplicativă.** La o fermă un cal are nevoie de 24 litri de apă pe zi. Pentru câte zile ar ajunge un container care conține 600 litri de apă? Dar un container cu capacitatea de 1512 litri? (nota 7)



13. **Problemă aplicativă.** Un țăran a adunat din grădină 60 kg de roșii, și dorește să le pună în lădițe de 4 kg. De câte lădițe are nevoie? (nota 7)



14. **Problemă aplicativă.** Un apicultor pregătește 48 kg de miere pentru a le vinde (48 kg = 480 dag). Dorește să folosească borcane de 5 dag. Câte borcane comandă? Dar dacă ar pune mierea în borcane de 8 dag? (nota 7)



15. 3480 bucăți de napolitane se pun în cutii. Într-o cutie încap 24 de bucăți. Câte cutii sunt necesare? (nota 7)

16. **Problemă aplicativă.** Un copil duce la grădina zoologică o pungă cu 40 de banane. La sectorul cu maimuțe le împarte în mod egal la acestea. Știind că sunt 9 maimuțe, câte banane a primit fiecare maimuță? Cu câte banane a rămas copilul? (nota 7)



17. **Problemă aplicativă.** Într-o ladă sunt 283 de portocale, care trebuie ambalate în pungi; câte 10 bucăți într-o pungă. Câte pungi cu portocale vor fi și câte portocale rămân neambalate? (nota 7)

18. **Problemă aplicativă.** O cantitate de 788 t de cereale este transportată în containere care au capacitatea de 15 t. Câte containere sunt pline? Ce cantitate de cereale se află în ultimul container? (nota 7)



19. **Problemă aplicativă.** O echipă de copii dintr-un grup „Eco” participă la o acțiune de împădurire. Ei trebuie să planteze brazi pe un lot și să pună câte 25 de puieți pe un rând. Știind că au 1362 de puieți, câte rânduri complete vor fi pe acest lot? Câți puieți vor fi pe ultimul rând? (nota 7)



20. **Problemă aplicativă.** a) Mama vine de la piață cu două coșuri. Într-unul sunt 24 de portocale, iar în celălalt 12 mandarine. Acasă împarte în mod egal portocalele din primul coș celor 4 copii după care trece la mandarine și procedează la fel. Câte fructe primește fiecare copil? Descrieți printr-un exercițiu.

b) Altă dată mama cumpără de la piață 24 de portocale, apoi încă 12 portocale și le pune în același coș. Acasă împarte în mod egal portocalele celor 4 copii. Câte portocale va primi fiecare copil? Descrieți și această situație printr-un exercițiu.

$$\text{I. } 24 : 4 + 12 : 4 = 6 + 3 = 9;$$

$$\text{II. } (24 + 12) : 4 = 36 : 4 = 9.$$

(nota 7)

21. La o împărțire de două numere naturale se știe că împărțitorul este 24, câtul este cu 7 mai mare, iar restul este jumătate din împărțitor. Aflați deîmpărțitul. (nota 7)

22. Găsiți numerele naturale mai mici decât 40 care la împărțirea prin 3 și 4 dau restul 2. (nota 7)

23. Să se afle cel mai mic și cel mai mare număr natural de două cifre care împărțite la un număr de o singură cifră dau restul 7. (nota 7)

24. Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural de două cifre care, împărțit la un număr natural de o singură cifră, dă restul 8. (nota 7)

25. Aflați cel mai mic număr natural care împărțit la 17 dă restul 11 și câtul diferit de zero. (nota 5)

26. Aflați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul 57 și apoi calculați suma lor. (nota 7)

27. Scrieți primele 6 numere de două cifre din șirul numerelor naturale care împărțite la 5 dau restul egal cu 1. (nota 7)

28. Împărțind numărul 267 la un număr natural se obține câtul 13 și restul 7. Aflați împărțitorul. (nota 7)

29. Un număr natural împărțit la 5 dă restul 4, iar câtul mai mic decât 6. Care este numărul? (nota 7)

30. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 6 dau câtul egal cu: a) 20; b) 100; c) 250; d) 13; e) 1000. (nota 7)

31. Să se calculeze suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr natural care împărțite la 12 dau câtul egal cu: a) 60; b) 1200; c) 11200. (nota 7)

32. Câtul și restul împărțirii a două numere naturale sunt egale cu 3. Să se afle cele două numere știind că suma lor este 63. (nota 9)

33. Suma a două numere naturale este 31. La împărțirea lor se obține câtul 4 și restul 1. Aflați numerele. (nota 9)

34. Diferența a două numere naturale este 340. Dacă le împărțim obținem câtul 4 și restul 10. Care sunt numerele? (nota 9)

35. Diferența a două numere naturale este 1999. Aflați numerele dacă câtul și restul lor este 5 și, respectiv, 7. (nota 9)

36. Diferența a două numere naturale este egală cu 817. La împărțirea lor se obține câtul 55 și restul 7. Să se afle numerele. (nota 9)

37. Să se determine cel mai mare număr natural n de patru cifre care împărțit la 17 dă câtul de 6 ori mai mare decât restul. (nota 9)

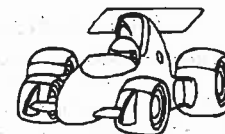
38. Suma a două numere naturale este 1997. Împărțind unul dintre ele la celălalt obținem restul 998. Aflați cele două numere. (nota 9)

39. Suma a două numere naturale este 1809, iar câtul împărțirii unuia la celălalt este 5 și restul 3. Să se afle numerele. (nota 9)

40. Suma a trei numere este 250. Dacă îl împărțim pe primul la al doilea sau pe al doilea la al treilea, obținem câtul 2 și restul 3. Aflați numerele. (nota 9)
41. Suma a trei numere este 1988. Să se afle numerele, știind că, dacă împărțim al doilea număr la primul număr obținem câtul 3, iar dacă împărțim pe al treilea la al doilea obținem câtul 2 și restul 108. (nota 9)
42. Un număr este cu 84 mai mare decât altul. Împărțind suma celor două numere la diferența lor, se obține câtul 15 și restul 14. Aflați cele două numere. (nota 10)
43. Aflați numerele naturale nenule care împărțite la 3 dau câtul egal cu restul. Câte soluții sunt? (nota 9)
44. La împărțirea unui număr natural nenul la 7 se obține câtul egal cu restul. Care este numărul? Câte soluții sunt? (nota 9)
45. Determinați numerele naturale n nenule, care împărțite la 5 dau câtul de două ori mai mare decât restul. (nota 10)
46. Aflați numerele naturale, care împărțite la 4 dau restul cu 1 mai mic decât câtul. (nota 9)
47. Aflați numerele naturale, care împărțite la 5 dau câtul cu 2 mai mic decât restul. (nota 9)
48. Împărțind cinci numere naturale consecutive la 6 se obține de fiecare dată câtul 7. Care sunt numerele? (nota 9)
49. La împărțirea unui număr natural n la 11 se obține restul de două ori mai mare decât câtul. Care este numărul n ? (nota 9)
50. Câte numere naturale de trei cifre împărțite la 11 dau restul 7? (nota 9)
51. Determinați numerele naturale de trei cifre care împărțite la 250 dau restul 37. (nota 9)
52. Determinați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul un număr natural mai mic decât restul. (nota 10)
53. Determinați două numere naturale știind că suma lor este 25, iar câtul împărțirii unuia la celălalt este 5. (nota 9)
54. a) Să se determine cel mai mare și cel mai mic număr natural de 3 cifre care împărțit la 17 dă restul 4. b) Să se afle suma tuturor numerelor de 3 cifre care împărțite la 17 dau restul 4. (nota 9)
55. Să se determine cel mai mare și cel mai mic număr natural nenul care împărțit la 1997 dă câtul de 10 ori mai mic decât restul. (nota 7)
56. Care este cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 19 dă restul 10? Dar cel mai mare? (nota 7)
57. Care este cel mai mare număr natural de trei cifre distincte care împărțit la 19 dă restul 10? (nota 7)
58. Victor așează în balanță 10 cărți și 45 monede din aur. Balanța este în echilibru. Tatăl lui vine și îi ia patru dintre aceste cărți, dar îi spune că toate cărțile pe care le-a folosit au aceeași greutate fiecare, și anume: 270 grame. Poate Victor să afle cât cântărește o monedă din aur știind de asemenea că monedele respective sunt la fel de grele? (nota 9)



59. Vlad și Ionuț concurează la carturi. Competiția constă în a reuși să termine 32 de ture complete, fără a se opri, într-un timp cât mai scurt. Începe cursa și mașina lui Ionuț merge mai bine decât mașina lui Vlad, astfel încât la fiecare 4 ture, Ionuț câștigă un avans de o jumătate de tură, iar această situație nu s-a schimbat deloc în timpul cursei. Oare câte ture a mai făcut Vlad, după ce Ionuț a terminat cursa? (nota 9)



60. Unchiul Vasile și-a dus două ciubere identice care sunt pline cu semințe de grâu, să le cântărească. Cântarul a indicat o masă de 144 kg. Nepotelul lui Vasile mai curios din fire, ar vrea să știe cât anume cântărește un ciubăr gol. Unchiul Vasile îi spune că o cincime din încărcătura de semințe a unui ciubăr înseamnă 13 kg. Cum o să procedeze nepotul pentru a afla care este greutatea unui ciubăr? (nota 9)



61. O probă a unui concurs distractiv pentru copii constă în trecerea printr-un labirint în cât mai scurt timp. Câte trei copii intră simultan în labirint prin cele trei porți prevăzute în acest scop. Se știe că prin labirint sunt trei trasee posibile și anume A – cu lungimea de 3600 metri, B – 3000 metri și C – 4800 metri, și toate trei trec prin centrul labirintului care este de fapt și mijloc al fiecărui traseu. Bogdan, Marcel și Silviu primesc startul la porțile traseului A, C și, respectiv, B. Bogdan și Marcel se deplasează cu viteza constantă de 20 m/min respectiv 21 m/min, iar Silviu cu 26 m/min. Știind că fiecare copil nu s-a oprit și nu a trecut de două ori prin același loc, iar din centru fiecare a continuat altă variantă de traseu decât cea pe care a pornit, Silviu continuând pe traseul C, găsiți care a ajuns primul și după cât timp. (nota 10)



62. Tatăl lui Miruna pregătește curtea și grădina pentru aniversarea fiicei sale. Dorește aranjamente cu baloane albe și roz. Pentru ceea ce și-a propus are nevoie de 350 de baloane albe și 270 baloane roz. La magazin constată că baloanele albe sunt în pachete de câte 12 bucăți iar cele roz de câte 15 bucăți. Câte pachete trebuie să cumpere din fiecare fel? Dar dacă ia câte 10 baloane din fiecare culoare în plus, pentru situația în care se mai sparg la asamblarea decorurilor? (nota 9)



63. Un carusel are o repriză de funcționare de 8 minute. În funcție de gradul de ocupare, are o anumită viteză de rotire. Când sunt toate locurile ocupate caruselul face 5 rotații în 3 minute, dacă sunt ocupate trei sferturi din locurile disponibile atunci face 2 rotații într-un minut, iar dacă sunt ocupate jumătate atunci face 5 rotații în două minute. De câte rotații beneficiază Ioana care a observat că în seria ei au rămas 9 locuri neocupate din cele 36 disponibile? (nota 9)

64. În drumul lor spre țările calde, traseele aeriene a cinci stoluri de păsări se intersectează în același loc. După câteva momente de încurcătură reușesc să se separe și pleacă toate mai departe însă de această dată în trei stoluri cu același număr de păsări fiecare. Dacă inițial un stol avea 18 păsări, altul 25, al treilea 15 și al patrulea 22, câte păsări puteau fi în al cincelea știind că era un număr cuprins între 10 și 20? (nota 9)



65. Iustin așează piesele de Domino la o distanță astfel încât căderea uneia să dureze 2 secunde până o atinge și declanșează căderea piesei următoare. Are 1800 de piese. Marcel are și el 1200 de piese și ar vrea să aibă același timp ca Iustin până cad toate piesele lui. Cât timp trebuie să dureze căderea unei piese la Marcel pentru a reuși? (nota 9)

I.10. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor



Să recapitulăm:

- ◆ Adunarea și scăderea sunt operații de ordinul I.
- ◆ Înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul al II-lea.
- ◆ Ridicarea la putere este o operație de ordinul al III-lea.

⇒ Dacă un exercițiu de calcul fără paranteze conține numai operații, de ordinul I (adunări și scăderi), acestea se efectuează în ordinea scrierii lor. *Exemple:* $85 - 13 + 61 - 40 = 72 + 61 - 40 = 133 - 40 = 93$.

⇒ Dacă un exercițiu de calcul fără paranteze, conține numai operații de ordinul al II-lea (înmulțiri și împărțiri), acestea se efectuează în ordinea scrierii lor. $85 : 17 \cdot 12 : 5 : 30 = 5 \cdot 12 : 5 : 30 = 60 : 5 : 30 = 300 : 30 = 10$.

⇒ Într-un exercițiu de calcul fără paranteze, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul al III-lea, apoi operațiile de ordinul al II-lea, iar la sfârșit operațiile de ordinul I. $25 \cdot 2 - 27 : 3 + 17 \cdot 4 - 42 : 7 = 50 - 9 + 68 - 6 = 109 - 6 = 103$.

⇒ Dacă un exercițiu de calcul conține paranteze, atunci efectuăm mai întâi operațiile din parantezele **rotunde** (după regulile de calcul fără paranteze), apoi cele din parantezele **drepte** și la sfârșit operațiile din parantezele **acolare**.
 $\{82 - 3 \cdot [(20 + 7 \cdot 5) : 5] - 3 \cdot 5\} \cdot 4 + 324 : 18 = \{82 - 3 \cdot [(20 + 35) : 5] - 15\} \cdot 4 + 18 = [82 - 3 \cdot (55 : 5) - 15] \cdot 4 + 18 = (82 - 3 \cdot 11 - 15) \cdot 4 + 18 = (82 - 33 - 15) \cdot 4 + 18 = (49 - 15) \cdot 4 + 18 = 34 \cdot 4 + 18 = 136 + 18 = 154$.

Exerciții rezolvate

Aflați termenul necunoscut:

a) $(x + 142 : 2) \cdot 3 + 41 \cdot 4 = 467$; b) $\{[(x + 2) \cdot 2 + 2] \cdot 2 + 2\} \cdot 2 + 2 = 62$.

Rezolvare:

a) $(x + 71) \cdot 3 + 164 = 467$
 $(x + 71) \cdot 3 = 467 - 164$
 $(x + 71) \cdot 3 = 303$
 $x + 71 = 303 : 3$
 $x + 71 = 101$
 $x = 101 - 71$
 $x = 30$.

b) $\{[(x + 2) \cdot 2 + 2] \cdot 2 + 2\} \cdot 2 = 62 - 2$
 $\{[(x + 2) \cdot 2 + 2] \cdot 2 + 2\} \cdot 2 = 60$
 $[(x + 2) \cdot 2 + 2] \cdot 2 + 2 = 60 : 2$
 $[(x + 2) \cdot 2 + 2] \cdot 2 + 2 = 30$
 $[(x + 2) \cdot 2 + 2] \cdot 2 = 30 - 2$
 $[(x + 2) \cdot 2 + 2] \cdot 2 = 28$
 $(x + 2) \cdot 2 + 2 = 28 : 2$
 $(x + 2) \cdot 2 + 2 = 14$
 $(x + 2) \cdot 2 = 14 - 2$
 $(x + 2) \cdot 2 = 12$
 $x + 2 = 12 : 2$
 $x + 2 = 6$
 $x = 6 - 2$
 $x = 4$.

EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Calculați cât mai rapid:

a) $498 + 203$; c) $123 \cdot 25 \cdot 4$; e) $1997 + 997 \cdot 1997 + 1997 \cdot 2$;
b) $504 + 498$; d) $192 + 73 + 8 + 27$; f) $555 : 15$.

(nota 5)

2. Calculați cât mai rapid: a) $(125 \cdot 49 \cdot 150) : (7 \cdot 30 \cdot 25)$;
b) $(95 \cdot 744 \cdot 121) : (11 \cdot 19 \cdot 24)$.

(nota 7)

3. Completați tabelul:

a	107 715		840	
b	215	95		1 327
a · b			35 280	375 541
a : b		201		

(nota 5)

4. Completați tabelele:

a)

a	35	72	100	145	21	87
$145 - a + 26$						

b)

a	12	72	6	228	36	612
$2 \cdot a - a : 6$						

c)

a	b	a + b	2a - b	2(a + b)	(a + b) - (a - b)
24	5				
12	3				
75	36				
147	102				

(nota 7)

5. Calculați și completați tabelul:

a	7 675	45 600	75 480	4 635	62 592
b	25	160	255	15	192
a · b					
a : b					
3 · a : b					
(a - b) : b					
(a + b) : b					

(nota 7)

6. În egalitățile: $a = 3 \cdot 5 : 1 - 2$, $b = 5 + 1 \cdot 2 + 1$ puneți paranteze astfel încât să avem $a = b$.

(nota 7)

7. a) Puneți parantezele ce se impun, astfel încât după modificările care apar, rezultatul operațiilor: $1 + 2 : 3 + 4 : 5 + 6 : 7 + 8 : 9 + 10$ să fie 11.

(nota 7)

b) Se dau următoarele egalități:

1) $1 \ 2 \ 3 = 1$; 2) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 = 1$;
3) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 = 1$; 4) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 = 1$.

Fără a schimba ordinea cifrelor puneți între ele semnele: „+”, „-”, „·”, „:” și paranteze pentru a obține egalități matematice.

(nota 7)

8. Calculați în două moduri:

a) $7 \cdot (5 + 9)$; e) $13 \cdot (982 - 745)$;
b) $(12 + 3) \cdot 11$; f) $(20 \cdot 3 - 15 \cdot 3) : (45 : 15 + 54 : 27)$;
c) $12 \cdot (14 - 9)$; g) $(35 \cdot 12 - 25 \cdot 12) : (45 : 9 + 54 : 18)$;
d) $(22 + 3 - 5) \cdot 7$; h) $(18 \cdot 19 + 18) : (15 \cdot 12 : 5)$.

(nota 7)

9. Efectuați: a) $100 - 10 \cdot [100 - 10 \cdot (10 - 10 : 10)]$;
b) $(222 + 333 + 555) : 111 \cdot 1997$.

(nota 7)

10. Ce număr ar trebui înscris în dreptunghiul gol?
371 532 693; 189 457.

(nota 7)

11. Aflați suma dintre produsul și câtul numerelor 2 632 și 188.

(nota 7)

12. Completați tabelul de mai jos astfel încât suma numerelor din oricare trei căsuțe alăturate să fie 20. 7 8

13. Calculați: $2\,000 - \{2\,000 - \{2\,000 - [2\,000 - (2\,000 - 1\,999)]\}$.

(nota 7)

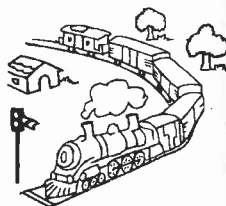
14. Calculați: $1 + 2 \cdot \{3 + 4 : [5 - 6 : (7 - 8 : 8)]\}$.

(nota 7)

15. Din 30 tone de sfeclă se obțin 3 960 kg de zahăr. Ce cantitate de zahăr se va obține din 45 t de sfeclă?

(nota 5)

16. **Problemă aplicativă.** Doi muncitori au primit pentru o lucrare 4176 lei. Primul muncitor a lucrat 21 de zile câte 8 ore pe zi și al doilea 20 de zile câte 9 ore pe zi. Ce sumă a primit fiecare muncitor? (nota 7)



17. **Problemă aplicativă.** Un tren având lungimea de 400 m trebuie să treacă printr-un tunel cu lungimea de 2600 m cu viteza de 30 km/h. În cât timp va străbate tunelul? (nota 7)

18. Calculați:

- a) $105 + 38\,415 - 10\,148 + 1\,003$;
 $112\,521 - 110\,012 + 148 - 2\,607$;
 $3 \cdot 175 + 15 \cdot 15$;
 $1\,999 - 99 : 3 - 1\,960$;
b) $100 \cdot 23 + 6\,900 : 3 - 10 \cdot 230$;
 $7\,675 : 25 + 7 \cdot 100 - 1\,000$;
 $1 \cdot 2\,000 : 20 \cdot 100 - 9\,999$;
 $12\,780 : 20 + 47 \cdot 107 - 2\,309$.

(nota 7)

19. Calculați:

- a) $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10) : 33 - 10$;
b) $\{[(169 : 13 - 6) + 3] : 10 + 27\} - [(2 + 9) \cdot 11 - 100]$.

(nota 7)

20. Calculați: a) $98\,765 \cdot \{4 - [3 - 2 \cdot (15\,120 : 105 - 144)]\}$;
b) $81 : 27 + 5 \cdot \{[3 + 3 \cdot (121 : 11 - 81 : 27)]\} : 27$.

(nota 7)

21. Calculați: a) $123\,456 \cdot \{9 - [8 - 7 \cdot (15\,120 : 105 - 144)]\}$;
b) $1997 : (1998 - 1998 : 1998) \cdot (1998 - 1)$.

(nota 7)

22. Calculați: a) $(102 : x) \cdot (801 : x)$; b) $(5\,852 : x) : (308 : x)$;
c) $(206 \cdot x) \cdot (15 : x)$. (în fiecare caz x este un număr natural nenul pentru care împărțirea este „fără rest”).

(nota 7)

23. Dacă: $a = 714$; $b = 6\,240$; $c = 15\,461$, calculați:

- a) $(c - b + a) \cdot 7$; b) $a + (c - 2 \cdot b + a)$; c) $(b - 40) : 100 + 4 \cdot a$.

(nota 7)

24. Efectuați:

- a) $269 + (245 : 5 : 7 + 93 - 126 : 3 + 7) - 2 \cdot 134$;
b) $4 \cdot 222 - (48 \cdot 10 : 2 + 66 \cdot 10 + 975 : 5 : 3 - 3 \cdot 33)$;
c) $847 : 7 - (936 : 9 \cdot 2 - 264 : 4 + 100 + 279 : 9) : 3$;
d) $(378 : 3 : 2 + 37) : 4 - (816 : 8 \cdot 3 - 123 \cdot 2) : 5$;
e) $(964 : 4 + 800 : 8 \cdot 7 - 65 \cdot 10 : 5 \cdot 3 + 2 \cdot 12) : 5$.

(nota 7)

25. Calculați:

- a) $470 \cdot 36 : 9 - (2\,000 - 320) : 14$;
 $976 : 4 - 182 + 136 \cdot 4 : 8 - 33 : 3$;
 $(72 \cdot 3 - 80) : 2 + 248 : 2 - (120 - 138 : 2)$;
b) $9\,873 - 4 \cdot \{21 + 3 \cdot [5 + (4 + 4 \cdot 8) : 9]\}$;
 $510 + \{5 \cdot [9\,600 : 30 - 15 \cdot (54 : 9)]\}$;
 $8 \cdot 5 - 4 \cdot [3 + 2 \cdot (1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 0)]$;
c) $50 + 2 \cdot \{477 : 9 + 3 \cdot [9 + 5 \cdot (306 : 17 - 288 : 18)]\}$;
 $564 : \{90 + 96 : [6 - (125 : 25 + 7) : 3] \cdot 4\}$;
 $2\,450 : (170 - 15 \cdot 9) : [(5 \cdot 45 - 50) : 25] : 5$.

(nota 7)

26. Efectuați:

- a) $\{267 \cdot 1\,359 + [4\,263 \cdot (26 \cdot 148 - 137 \cdot 27)] - 5\,136 \cdot 192\} : 168$;
b) $4 \cdot 500 - \{4\,704 : 24 + 3 + 178 \cdot 5 - [6\,950 : 25 + 2 + (486 : 2 + 122 \cdot 3)]\} : 4$;
c) $5 + \{10\,381 : 1\,483 + [1 + 7\,452 : 69 + (42\,542 : 178 - 10\,296 : 264) : 4] : 3\} : 4$.

(nota 7)

27. Efectuați:

- a) $72 + 72 : 6 \cdot 3 - 15 \cdot 3$;
b) $13 \cdot 27 + 945 : 27 - 8 \cdot 4 : 2$;
c) $27 : 3 \cdot (250 - 375 : 15) - 27 \cdot 75$;
d) $(2125 + 375 \cdot 2) \cdot 0 + 1001 : 13$;
e) $(2 + 15 \cdot 3) : (8 \cdot 5 + 7) + 1488 : 124$;
f) $15 \cdot 16 : 12 - (225 : 15 - 15) \cdot 242$.

(nota 7)

28. Calculați:

- a) $11 + 2 \cdot [3 + (4 + 5 \cdot 6) : 2] : 5 - 13$; b) $[(21 \cdot 15 - 300) : 3 + 7] : 4 - 3$;
c) $\{1 + 2 \cdot [1 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 5)] - 50\} : 5$; d) $\{[15 \cdot 25 - (14 + 8 \cdot 3)] - 215\} : 2 + 3$;
e) $12 \cdot \{55 + 7 \cdot [21 - 3 \cdot (7 \cdot 3 - 20)] - 165\} + 2448 : 24$;
f) $455 + \{455 + [455 + (455 - 400)]\} - 1\,420$.

(nota 7)

29. Calculați:

- a) $(3\,516 - 3\,036) : 48 + (424 + 516 + 160) : 55$;
b) $246\,820 : [194 \cdot 47 - (8\,305 - 1\,742 + 68 \cdot 57 - 128 \cdot 12)]$;
c) $\{100\,000 - 3\,750 \cdot [200 - 666\,666 : (3\,700 - 37)]\} : 325$;
d) $(102 \cdot 1\,044 + 7\,056 \cdot 3\,404 : 7\,056 - 3\,404) : 2\,088$.

(nota 7)

30. Să se calculeze:

- a) $99 + 101 \cdot 101 : 101 + 279 - 2000 \cdot 0$; b) $480 : (95 - 80) - (126 : 6 - 170 \cdot 0) : 7$;
c) $5 \cdot (200 + 480 : 16) + [1\,320 : 40 + 5 \cdot (15 + 17 + 8)]$;
d) $8 \cdot (300 + 520 : 26) - [2640 : 80 + 101 \cdot (17 + 8) + 2]$.

(nota 7)

31. Să se calculeze:

- a) $[312 \cdot 47 - 123 \cdot 41 + (1\,350 \cdot 42 - 56\,521)] : 490$;
b) $12\,936 : \{2 \cdot (2 \cdot 123 - 2\,424 : 12) + 12\,350 : 25\} \cdot 3 - 3\,225 : 25$;
c) $450 + \{[3 \cdot (3 \cdot 41 - 450 : 15) : 31 + 2525 : 25] \cdot 2 - 9240 : 132\} : 3$.

(nota 9)

32. a) Să se scrie 20 ca sumă și produs al acelorași numere naturale.
b) Să se scrie 91 ca sumă și produs al acelorași numere naturale. (nota 7)

33. Determinați numerele naturale a căror sumă și produs este 55. (nota 7)

34. Într-o școală sunt 735 de elevi. Arătați că printre elevii acestei școli se află neapărat cel puțin 3 elevi care-și serbează ziua de naștere în aceeași zi. (nota 10)

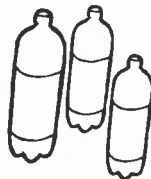
35. Alcătuiți o problemă care să se rezolve prin exercițiul:
 $2\ 048 - (2\ 048 : 2 + 1\ 024 : 4 + 149) =$ (nota 7)

36. Formulați probleme care să se rezolve după:
a) $a + b = 15$ și $a : b = 2$; b) $a - b = 17$ și $a : b = 18$. (nota 7)

37. Formulați probleme care să se rezolve după:
a) $10a - 3b = 55$; b) $(5a - 4b) : 9 = 11$. (nota 9)

38. Produsul a 3 numere este 2 016. Primul număr este 7, iar al doilea număr este cu 5 mai mare decât primul. Aflați al treilea număr. (nota 7)

39. **Problemă aplicativă.** În prima zi s-au vândut într-un magazin 840 l de ulei. În a doua zi s-au vândut 1920 l de ulei și s-au încasat cu 18360 lei mai mult decât în prima zi. Câți lei s-au încasat în total în cele două zile? (nota 7)



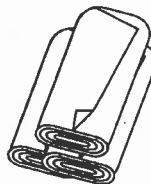
40. **Problemă aplicativă.** La un aprozar de la o fermă s-au adus 319 kg pere, 420 kg mere și 105 kg struguri cu: 2 lei/kg de pere, 3 lei/kg de mere și 4 lei/kg de struguri. Din banii obținuți, ferma a plătit în mod egal 6 salariați și a obținut un profit de 1118 lei. Câți lei a primit fiecare salariat? (nota 7)



41. **Problemă aplicativă.** Trei muncitori au primit pentru o lucrare efectuată 1800 lei. Știind că primul a lucrat 12 zile, al doilea cu 3 zile mai mult, aflați câte zile a lucrat al treilea muncitor, dacă pe zi sunt plătiți fiecare cu suma de 40 lei. (nota 7)



42. **Problemă aplicativă.** La un magazin s-au primit 3 baloturi de pânză. Primul balot are lungimea de 20 m, al doilea are lungimea de 2 ori mai mare decât primul, iar al treilea are lungimea a treia parte din lungimile primelor două la un loc. Știind că 1 m din primul balot costă 10 lei, 5 m din al doilea costă cât 2 m din primul, iar 1 m din al treilea costă cât 2 m din primul, aflați valoarea pânzei primite. (nota 7)



43. Suma a 4 numere este 170. Aflați numerele știind că suma primelor 3 este 150, suma ultimelor 3 este 130 și al treilea este de 4 ori mai mare decât al doilea. (nota 9)

44. Aflați termenul necunoscut din următoarele egalități:

a) $a + 63\ 486 = 1\ 005\ 703$; $431\ 500 + b = 703\ 800$;
 $c - 46\ 502 = 188\ 976$; $536\ 211 - d = 146\ 203$.

b) $550\ 480 - (m - 603) = 408\ 300$; $252 : (n + 13) = 12$;
 $(x - 735) : 5 = 478$; $2\ 075 + (1\ 250 - y) = 3\ 009$. (nota 7)

45. Aflați x din egalitățile: a) $\{[(x : 3) : 2] : 4\} : 5 = 25$;
b) $[(x : 2) : 6] : 5 = 13$; c) $[(x : 9) : 8] \cdot 7 = 140$. (nota 7)

46. Aflați x din:
a) $[2 \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot 2) + 4] : 15 = 4$;
b) $216 : [16 + (42 : x - 15 : 3) : 2] = 9$;
c) $12 + [104 : 26 + 2 \cdot (3 \cdot 5 - x) - 12 : 2] : 2 = 15$;
d) $10 \cdot \{24 - [20 - 5 \cdot x - 3]\} : 2 = 150$;
e) $10 - \{10 - [10 - (10 - 2 \cdot x)] : 10\} = 1$;
f) $2 \cdot \{27 - 2 \cdot [3 \cdot x - (35 : 5 - 2 \cdot 3)] + 3\} : 4 = 10$;
g) $[x + (12 : 4 - 6 : 3)] \cdot (5712 : 56 - 100) = 6$. (nota 9)

47. Calculați termenul necunoscut:
a) $(x + 192 : 2) \cdot 3 + 59 \cdot 4 = 1988$; $(y : 4 - 59) : 3 - 192 : 2 = 50$;
 $\{[(x + 3) \cdot 3 + 3] \cdot 3 + 3\} \cdot 3 + 3 = 120$;
b) $10 \cdot \{x - 10 \cdot [362 + 10 \cdot (24 + 24 : 4)]\} = 100$;
 $124\ 569 : 9 - 6\ 935 + 735 : 35 - 107 = 124 \cdot a$;
 $[(a + 5\ 370 : 30) - 639] : [9\ 315 : 27 - (2\ 681 + 417 \cdot 28 - 14\ 019)] = 26$;
c) $18 + a + 19 + a + 20 + a = a + a + a + a$; $a : [(921 - 639) : 6 - 39] = 9$. (nota 9)

48. Calculați x din:
a) $1 + \{2 \cdot [3 + (x - 4) \cdot 5] : 6\} \cdot 7 = 8$; d) $[36 : (24 - x) + 29] : 5 = 7$;
b) $\{[(67 \cdot x - 186) \cdot 4 - 45] \cdot 14 + 290\} : 500 = 1$; e) $\{2 \cdot [20 - (5 + x) : 6] - 5\} : 9 + 17 = 20$.
c) $x : [(921 - 639) : 6 - 39] = 9$; (nota 7)

49. Să se afle x din:
a) $(8 + 3x) \cdot 14 - 30 = 1\ 762$; c) $1 + \{2 \cdot [3 + (x - 4) \cdot 5] : 6\} \cdot 7 = 8$;
b) $\{[(3x + 5) \cdot 3 + 5] \cdot 3 + 5\} \cdot 3 + 5 = 281$; d) $9 \cdot [9 \cdot (x : 9 - 222) + 1] + 1 = 10$. (nota 7)

50. Arătați că numărul $A = 3\ 045 : [307 - (x + 3 \cdot 43 - 5\ 547 : 43) : x - 103]$ nu depinde de x (x este un număr natural nenul). (nota 9)

51. Aflați a din egalitatea: $256 : [326 - (b + 249 - 6723 : 27) : b - 3 \cdot 103] = 125 - 4\ 905 : a$, unde b este un număr natural nenul. (nota 9)

52. Aflați x din egalitatea: $128 - 4\ 320 : x = 8 \cdot [485 - a : (239 - 8\ 126 : 34 + a) - 480]$, unde a este număr natural nenul. (nota 9)

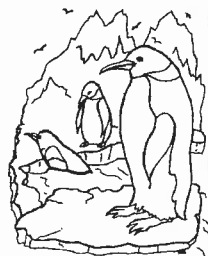
53. Arătați că pentru orice număr natural x are loc egalitatea:
 $[756 - (485 - 23 \cdot 21 + x) : (x + 2) - 1] : 377 = 2$. (nota 9)

54. Un convoi de 12 măgăruși transportă alimente într-un sătuc mai izolat. Fiecare măgăruș are câte doi saci. Cantitatea de alimente dintr-un sac este de 35 de kilograme și 8 dintre măgăruși duc saci la fel de încărcăți. Ceilalți măgăruși trebuie să transporte saci mai grei. Fiecare sac are cu 7,5 kg în plus față de un sac transportat de primii opt măgăruși. Ce cantitate de alimente poate fi transportată cu ajutorul acestor măgăruși?



(nota 9)

55. Ca niciodată, părinții pinguinului Wili, s-au îmbolnăvit și nu vor putea să se deplaseze timp de patru luni (începând cu octombrie) în acele zone unde se găsește hrană din belșug pentru întreaga colonie de pinguini. Așa că micul Wili, începe să facă provizii. Pentru a supraviețui un pinguin adult are nevoie de 12 peștișori mici pe zi, iar un pui de 5 peștișori. Câți peștișori trebuie să pescuiască Wili pentru a asigura cantitatea minimă de hrană pentru el și părinții lui? (nota 9)



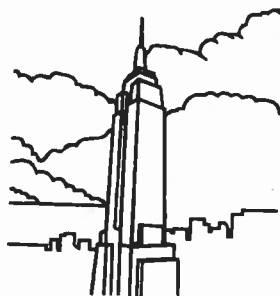
56. Un autotren cu 4 compartimente, transportă îngrășământ pentru 3 ferme agricole din județul Mureș. Comanda transmisă era de 12500 kg la prima fermă, 16000 kg la a doua și, respectiv, de 22400 la a treia. Dacă autotrenul are capacitatea fiecărui container de 18000 kg, iar acum are două containere pline, al treilea pe jumătate încărcat și ultimul cu două cincimi din capacitate, va satisface comanda fermelor din Mureș? (nota 9)



57. Într-o seră cunt cultivate roșii pe 36 de rânduri. O treime din numărul de rânduri are câte 15 tufe, o treime câte 12 tufe și ultima treime câte 10 tufe. Într-un sezon o tufă produce minim 5 kg de roșii. Proprietarul face bulion. A zecea parte din roșii se pierde la curățare, iar după ce se pun la fiert se pierde o pătrime din cantitatea curățată. Câte sticle cu capacitatea de 750 grame trebuie să pregătească proprietarul dacă ia în calcul cantitatea minimă de roșii care poate fi produsă? (nota 10)



58. O clădire foarte înaltă este prevăzută cu 12 cabine de lift. Aceste cabine au anumite limite impuse privind numărul de persoane, și anume: minim două și maxim 20, cu excepția liftierului. Se știe că locatarii din clădire care folosesc aceste lifturi, tot câte 8 persoane au greutatea exprimată printr-un număr natural cuprins între 55 și 105, inclusiv aceste valori. Liftierii au aceeași greutate: 82 de kilograme. Care este greutatea minimă și cea maximă pe care o pot transporta cele 12 cabine simultan? (nota 10)



Test 7

1. Calculați $x + 135$ dacă $x = 1352$. (10 p) (nota 5)
 2. Calculați: a) $108 : 9$; b) $13 \cdot 12 - 14 \cdot 5$. (10 p) (nota 5)
 3. Determinați x din egalitățile:
a) $x + 8 = 33$; b) $x - 9 = 43$; c) $x \cdot 37 = 222$; d) $2028 : x = 13$. (20 p) (nota 5)
 4. Știind că: $a \cdot b = 15$ și $c = 16$, calculați: a) $(a \cdot b) \cdot c$; b) $a \cdot (b \cdot c)$. (5 p) (nota 7)
 5. Știind că: $a - b = 15$ și $c = 4$, calculați: $ac - bc$. (5 p) (nota 7)
 6. Aflați câtul și restul următoarelor împărțiri: a) $2375 : 31$; b) $4156 : 102$. (5 p) (nota 7)
 7. Suma a două numere este 45, iar diferența lor este 5. Calculați produsul numerelor. (5 p) (nota 7)
 8. Calculați cât mai rapid:
a) $2007 \cdot 38 - 2007 \cdot 36 - 2007$; b) $452 \cdot 15 + 452 \cdot 88$. (10 p) (nota 9)
 9. Determinați numerele naturale a, b, c știind că:
 $a + b = 90$; $b + c = 110$; $a + c = 100$. (10 p) (nota 9)
 10. Aflați patru numere naturale consecutive știind că împărțind suma lor la 17 obținem câtul 12 și restul 6. (10 p) (nota 10)
- Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 8

1. Calculați: a) $13 \cdot 5 - 18 : 2$; b) $3 \cdot (42 - 30 : 6)$. (10 p) (nota 5)
 2. Aflați x din egalitățile: a) $x : 9 = 45$; b) $80 : x = 16$; c) $x \cdot 42 = 378$; d) $x : 501 = 4$. (20 p) (nota 5)
 3. Aflați numărul natural care la împărțirea cu 7 dă câtul 3 și restul dublul câtului. (10 p) (nota 5)
 4. Dacă la triplul unui număr natural adunăm 81 obținem 108. Aflați numărul. (5 p) (nota 7)
 5. Calculați:
a) $\{80 - [80 - (80 - 78)]\} : 2$; b) $[(457 + 343) : 100 + 4 \cdot (216 - 37)] \cdot (180 : 45 - 2)$. (10 p) (nota 7)
 6. Calculați: $5 + 10 + 15 + \dots + 995$. (5 p) (nota 7)
 7. Împărțind un număr natural nenul a la numărul natural b , obținem câtul 10 și restul 9. Arătați că $a + b \geq 119$. (10 p) (nota 9)
 8. Împărțind un număr natural n la 85 obținem restul 81. Ce rest vom obține dacă împărțim numărul n la 17? (10 p) (nota 9)
 9. a) Aflați câte numere naturale de trei cifre împărțite la 21 dau restul 12.
b) Aflați suma tuturor numerelor naturale de trei cifre care împărțite la 21 dau restul 12. (10 p) (nota 10)
- Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

I.11. Noțiunea de divizor; noțiunea de multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5



Să recapitulăm:

Ce înțelegem prin divizor și multiplu?

Un pomicultor trebuie să sădească 320 de puiți de mieri.

a) Dacă pune câte 40 de puiți pe un rând, câte rânduri de puiți va sădi pomicultorul?

b) Câte rânduri complete de puiți va sădi pomicultorul dacă trebuie să pună câte 50 de puiți pe rând? Câți puiți îi rămân în acest caz?

Rezolvare:

$$a) 320 = 40 \cdot 8$$

Răspuns: 8 rânduri

Scriem:

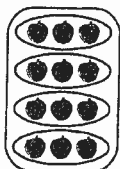
$$320 : 40$$

Citim:

- ♦ 320 este divizibil cu 40 sau
- ♦ 320 se divide cu 40 sau
- ♦ 320 este multiplu al lui 40.

$$40 / 320$$

- ♦ 40 divide pe 320
- ♦ 40 este divizor al lui 320.



$$12 = 4 \cdot 3$$

$$3 / 12 \text{ și } 4 / 12.$$

În concluzie:

⇒ Ada pune 12 mere în 4 pungi, câte 3 mere în fiecare pungă.

În general:

⇒ Numărul natural b divide numărul natural a , dacă există numărul natural c , astfel încât: $a = b \cdot c$.

Scriem:

- ♦ b / a sau $a : b$.
- ♦ b este divizor a .
- ♦ a este multiplu al lui b .



Să observăm:

- ♦ Divizorii numărului 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

$$b) 320 = 50 \cdot 6 + 20$$

Răspuns: 6 rânduri complete și îi mai rămân 20 de puiți.

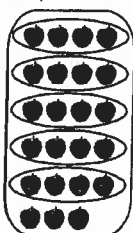
Scriem:

$$320 / 40$$

Citim:

- ♦ 320 nu se divide cu 50 sau
- ♦ 320 nu este divizibil cu 50 sau
- ♦ 320 nu este multiplu al lui 50
- ♦ 320 nu este multiplu al lui 50 sau
- ♦ 50 nu divide pe 320 sau
- ♦ 50 nu este divizor al lui 320

$$50 / 320$$



$$23 = 4 \cdot 5 + 3$$

$$4 \nmid 23 \text{ și } 5 \nmid 23.$$

⇒ Victor nu poate așeza 23 de mere în 5 pungi, dacă pune câte 4 mere în fiecare pungă.

⇒ Numărul natural m nu divide numărul natural n , dacă nu există nici un număr natural p astfel încât $n = m \cdot p$.

- ♦ $m \nmid n$ sau $n \nmid m$.
- ♦ n nu este multiplu al lui m .
- ♦ m nu este divizor al lui n .

Exercițiu rezolvat:

★ Să se scrie toți divizorii numerelor: 7; 10; 15; 24; 30.

Rezolvare:

- divizorii lui 7 sunt: 1 și 7.
- divizorii lui 10 sunt: 1, 2, 5 și 10.
- divizorii lui 15 sunt: 1, 3, 5, 15.
- divizorii lui 24 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
- divizorii lui 30 sunt: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.



Rețineți!

⇒ Pentru a afla dacă un număr natural a este divizibil cu numărul natural nenul b , împărțim a la b și conform teoremei împărțirii cu rest avem: $a = b \cdot c + r$, unde $r < b$.

Concluzie:

⇒ Dacă restul împărțirii lui a la b este 0, atunci $a = b \cdot c$ și b / a .

⇒ Dacă restul împărțirii lui a la b este diferit de zero, atunci $b \nmid a$.

Exemple:

$$174 / 6090?$$

$$7835 : 16?$$

Efectuăm împărțirea:

$$6090 : 174 = 35; 6090 = 174 \cdot 35.$$

$$7835 : 16 \text{ dă câtul } 48 \text{ și restul } 11.$$

$$\text{Deci } 174 / 6090.$$

$$7835 = 16 \cdot 489 + 11. \text{ Deci } 16 \nmid 7835.$$



Observație: ⇒ Sunt cazuri în care fără a efectua împărțirea, putem afirma dacă un număr este sau nu divizibil cu alt număr.

Divizibilitatea cu 10, 2 și 5

Când un număr natural este divizibil cu 10?



Să rezolvăm:

★ Ada poate așeza 360 de bomboane în pungi de câte 10 bomboane fiecare? Dar 3600? Dar 400?

Răspunsul este afirmativ.

$$360 = 36 \cdot 10;$$

$$3600 = 360 \cdot 10 \text{ și } 400 = 40 \cdot 10.$$

Concluzie: 10 / 360; 10 / 3600; 10 / 400.

★ Victor poate așeza 365 de bomboane în pungi de câte 10 bomboane fiecare? Dar 452 de bomboane? Dar 347 de bomboane?

Răspunsul este negativ pentru că:

$$365 = 10 \cdot 36 + 5; 452 = 45 \cdot 10 + 2;$$

$$347 = 34 \cdot 10 + 7.$$

Concluzie: 10 $\nmid$ 365; 10 $\nmid$ 452; 10 $\nmid$ 347.



Să reșinem!

⇒ Dacă cifra unităților unui număr natural este 0, atunci numărul se divide cu 10.

⇒ Dacă cifra unităților unui număr natural nu este 0, atunci numărul nu se divide cu 10.

Exemple:

$$10 / 450; 10 / 3370; 10 / 80; 10 / 1345030.$$

$$10 \nmid 341; 10 \nmid 122; 10 \nmid 1003; 10 \nmid 1007.$$



Să observăm:

❖ La o serbare școlară Elena aduce 355 de beculețe, iar Oana 360 de beculețe în cutii cu câte 5 beculețe fiecare. Câte cutii cu beculețe aduce Elena la serbare? Dar Oana?
Răspuns: Elena aduce $355 : 5 = 71$ de cutii iar Oana $360 : 5 = 72$ de cutii.

În concluzie:

5 / 355; 5 / 360.

În general:

➔ Un număr natural se divide cu 5 dacă cifra unităților acestuia este 0 sau 5.



Să rezolvăm:

1. Care dintre numerele următoare sunt divizibile cu 5 (multipli ai lui 5)?

1375; 27300; 14513; 23452; 70001; 75123045.

Răspuns: 1375; 27300; 75123045.

2. Adăugați o cifră la fiecare dintre numerele 12; 32; 479; 11341; 178 pentru a obține un număr natural divizibil cu 5.

Rezolvare: 120; 125; 320; 325; 4790; 4795; 113410; 113415; 1780; 1785.



Să observăm:

Fie șirurile de numere naturale:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 96, 98, 100.

Avem: $0 = 2 \cdot 0$; $2 = 2 \cdot 1$; $4 = 2 \cdot 2$;

$6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2 \cdot 4$; ... $10 = 2 \cdot 5$.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., 101.

$1 = 2 \cdot 0 + 1$; $3 = 2 \cdot 1 + 1$; $5 = 2 \cdot 2 + 1$;

... $101 = 2 \cdot 50 + 1$.

Concluzie:

➔ Toate numerele din șir se divid cu 2

➔ Numerele care se divid cu 2 se numesc *numere pare*.

➔ Orice număr par este de forma $2 \cdot n$, unde n este număr natural.

➔ Un număr natural se divide cu 2, dacă ultima cifră a numărului este pară, adică 0, 2, 4, 6, 8.

➔ Toate numerele din șir *nu se divi* cu 2.

➔ Toate numerele care dau restul 1 la împărțirea cu 2 se numesc *numere impare*.

➔ Oricare număr impar este de forma $2 \cdot n + 1$, unde n este număr natural.

➔ Un număr natural nu se divide cu 2, dacă ultima cifră a numărului este impară, adică 1, 3, 5, 7, 9.

Exemple:

❖ Numerele 578 și 12346 sunt divizibile cu 2 pentru că au cifra unităților 8 și, respectiv 6, adică cifre pare.

❖ Numerele 177 și 13451 nu sunt divizibile cu 2 pentru că au cifrele unităților 7 și, respectiv 1, adică cifre impare.

Când un număr natural este divizibil cu 5?

❖ Victor aduce la aceeași serbare 357 de beculețe, iar Gaby 256 de beculețe în cutii cu câte 5 beculețe fiecare. Câte cutii pline cu beculețe aduce Victor și, respectiv, Gaby?

Răspuns: Victor aduce $357 : 5 = 71$ de cutii pline și încă două baloane, iar Gaby aduce 51 de cutii pline și, încă un balon.

5 $\nmid$ 357; 5 $\nmid$ 256.

Exerciții rezolvate

1. Care dintre următoarele numere naturale sunt divizibile cu 2 (multipli ai lui 2)?
 342; 567329; 1711; 488; 366; 833; 1450; 1897; 174324.

Răspuns: 342, 488; 366; 1450; 174324.

2. Adăugați după cifra unităților încă o cifră astfel încât numerele 17; 23; 571 să fie divizibile cu 2.

Răspuns: 170; 172; 174; 176; 178; 230; 232; 234; 236; 238; 5710; 5712; 5714; 5716; 5718.

3. Aflați numerele de forma $23a$ divizibile cu 2.

Răspuns: 230, 232, 234, 236, 238.



Rețineți!

- ➔ Dacă a este un număr natural a .
- ➔ Dacă a este un număr natural a .
- ➔ Dacă a este un număr natural a .
- ➔ Dacă a/b este un număr natural a/b , atunci a/c , unde a, b, c sunt numere naturale.
- ➔ Dacă m/a și n/b , atunci $m/a + b$ și $m/a - b$, unde m, a, b sunt numere naturale.
- ➔ Suma sau diferența a două numere pare este număr par.
- ➔ Suma sau diferența a două numere impare este număr par.
- ➔ Suma sau diferența dintre două numere de parități diferite este un număr impar.
- ➔ Produsul dintre un număr par și un număr natural oricare este număr par.
- ➔ Produsul a două numere impare este număr impar.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

1. Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:

p_1 : „3 / 123”; p_2 : „5 / 1245”; p_3 : „2 / 144”; p_4 : „1427 : 7”; p_5 : „1458 : 9”; p_6 : „316 : 17”;
 p_7 : „354280 : 10”; p_8 : „1848 : 4”. (nota 5)

2. Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:

p_1 : „25 este un divizor al lui 175”; p_6 : „24 este un multiplu al lui 8 și un divizor al lui 72”;
 p_2 : „4 este un divizor al lui 128”; p_7 : „7 este un divizor al lui 27”;
 p_3 : „172 este un multiplu al lui 2”; p_8 : „2462 este un multiplu al lui 3”.
 p_4 : „1250 este un multiplu al lui 5”;
 p_5 : „2420 este un multiplu al lui 10”; (nota 5)

3. Puneți în căsuțele de mai jos semnul „/” sau „:” pentru ca propozițiile următoare să fie adevărate: a) $45 \square 5$; b) $2 \square 148$; c) $78 \square 3$; d) $1420 \square 10$; e) $1422 \square 2$; f) $21 \square 441$;
 g) $3200 \square 100$; h) $18 \square 36$. (nota 5)

4. Stabiliți care dintre numerele date sunt divizibile sau nu cu numerele indicate, completând tabelul după model:

	1	2	3	4	5	6	10	12	13	15
24	A	A	A	A	F	A	F	A	F	F
8										
32										
0										
200										
576										
650										

5. Scrieți toți divizorii numerelor: 6, 15, 18, 29, 32, 35.
6. Care este cel mai mic număr natural care are exact doi divizori?
7. Scrieți divizorii comuni ai numerelor și precizați în fiecare caz care este cel mai mare dintre ei.
- a) 12 și 20; d) 11 și 9; g) 26 și 39; j) 22 și 66;
 b) 40 și 50; e) 17 și 7; h) 9 și 12; k) 42 și 66;
 c) 15 și 60; f) 6 și 9; i) 22 și 33; l) 14 și 28.
8. Scrieți cinci multipli ai numărului 8 mai mari decât 10.
9. Aflați cel mai mic număr natural de trei cifre care este multiplu de 25.
10. Scrieți cinci multipli comuni ai numerelor 8 și 12.
11. Care este cel mai mic număr natural care se divide cu 3, 4 și 5?
12. Să se arate că numărul $a + b + c$, unde $a = 1 + 3 + 5 + \dots + 111$, $b = 10 + 30 + 50 + \dots + 110$, $c = 100 + 300 + 500 + \dots + 1100$, este divizibil cu 111. (nota 10)
13. Să se arate că numărul $\overline{xyzxyz}$ admite ca divizor pe 91. (nota 10)
14. a) Să se scrie toate numerele divizibile de 5 cuprinse între 31 și 76;
 b) Să se scrie toate numerele divizibile cu 2 cuprinse între 13 și 25;
 c) Să se scrie toate numerele divizibile cu 10 cuprinse între 75 și 151. (nota 5)
15. Se dau numerele: 240; 115; 248; 352; 1120; 2785; 548; 28000; 35; 1724; 3528; 4232; 1234; 5005; 1000. Să se scrie toate numerele divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10; d) 2 și 5. (nota 5)
16. Fie șirul de numere: 45, 32, 1010, 520, 345, 27, 155, 720, 347, 10, 5, 2, 40, 130, 2000, 14756, 17565, 12130, 83, 97, 105, 129, 540, 300000. Stabiliți care dintre aceste numere sunt: a) divizibile cu 10; b) divizibile cu 2; c) divizibile cu 5. (nota 5)
17. Fie șirul de numere: 49, 53, 45, 105, 320, 563, 1023, 1400, 2555, 3700, 11200, 3047, 1232, 1405, 7000. Stabiliți care dintre aceste numere nu sunt: a) divizibile cu 10; b) divizibile cu 2; a) divizibile cu 5. (nota 5)
18. Determinați numerele de forma $\overline{4a2a3a}$ divizibile cu: a) 5; b) 10. (nota 5)
19. Suma a două numere naturale este 27. Să se afle numerele știind că unul este divizibil cu 2 iar celălalt cu 5. (nota 9)
20. Scrieți numerele cuprinse între 59 și 75 divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10. (nota 5)
21. Să se afle toate numerele de forma $\overline{2xx}$ divizibile cu 2. (nota 7)
22. Să se afle câte numere de forma $\overline{24xy}$ sunt divizibile cu 5. (nota 7)
23. Să se afle toate numerele de forma $\overline{17xyy}$ divizibile cu 10, unde $x \neq y$. (nota 9)
24. Determinați numerele de forma $\overline{4xy}$ divizibile cu: a) 2; b) 10; c) 5. (nota 5)
25. Determinați numerele de forma $\overline{34a}$ divizibile cu: a) 10; b) 2; c) 5. (nota 5)
26. Determinați numerele de forma $\overline{123x}$ divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10. (nota 5)

27. Determinați numerele de forma $\overline{a34a}$ divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10. (nota 5)
28. Determinați numerele naturale de forma $\overline{xx2x}$ divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10. (nota 5)
29. Determinați numerele naturale de forma $\overline{42x3x}$ divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10. (nota 5)
30. Câte numere naturale de forma $\overline{34xy}$ sunt divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10? (nota 9)
31. Câte numere naturale de forma $\overline{a354b}$ sunt divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10? (nota 9)
32. Câte numere naturale de forma $\overline{a3bc}$ sunt divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10? (nota 9)
33. Arătați că dintre 6 numere naturale consecutive cel puțin unul este divizibil cu 5. (nota 10)
34. Arătați că produsul a două numere naturale consecutive se divide cu 2. (nota 10)
35. Determinați numerele naturale de forma $\overline{30ab}$ divizibile cu 24. (nota 9)
36. Determinați numerele naturale de forma $\overline{21a5b}$ divizibile cu 75. (nota 10)
37. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{3x4y}$ divizibile cu 2, care au suma cifrelor egală cu: a) 10; b) 15; c) 18. (nota 9)
38. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{12xy}$ divizibile cu 5, care au suma cifrelor egală cu: a) 10; b) 14; c) 15. (nota 9)
39. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{xxy}$ divizibile cu 2, care au suma cifrelor egală cu: a) 10; b) 16; c) 21. (nota 10)
40. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{xyy}$ divizibile cu 5, care au suma cifrelor egală cu: a) 9; b) 19; c) 27. (nota 10)
41. a) Să se scrie toate numerele pare cuprinse între 21 și 43;
 b) Să se scrie toate numerele impare cuprinse între 70 și 86. (nota 5)
42. Suma a cinci numere naturale consecutive este un număr par. Cel mai mic dintre ele este par sau impar? (nota 10)
43. Suma a șase numere pare consecutive este 78. Să se afle numerele. (nota 9)
44. Suma a patru numere naturale impare consecutive este 32. Să se afle numerele. (nota 9)
45. Suma a 5 numere naturale pare consecutive este 440. Aflați numerele. (nota 9)
46. Suma a 7 numere naturale impare consecutive este 119. Aflați numerele. (nota 9)
47. Suma a 5 numere pare consecutive este 8880. Aflați numerele. (nota 9)
48. Stabiliți, valoarea de adevăr a propozițiilor:
 a) „Orice număr natural par este divizibil cu 4”.
 b) „Orice număr natural de forma $6n - 1$, unde n este număr natural nenul, se divide numai cu 1 și cu el însuși”.
 c) „Orice număr natural de forma $n^2 - n + 1$, unde n este număr natural, se divide numai cu 1 și cu el însuși”.
 d) Numărul natural de forma $n^2 + n + 4$, unde n este număr natural are și alți divizori în afară de 1 și de el însuși.

49. Andrei pregătește „buchete“ de baloane colorate pentru a le da drumul cu ocazia aniversării surorii lui. Vrea să facă buchete, cât mai multe buchete, astfel încât acestea să aibă același număr și combinație din toate culorile pe care le are la dispoziție. Are 24 baloane albe, 16 roșii, 40 albastre și 56 galbene. Câte buchete o să lanseze Andrei și care va fi compoziția unui astfel de buchet?



50. O moară de vânt amplasată într-o zonă unde de regulă bate vântul, macină 15 saci cu grâu în 24 de ore. Câți saci cu grâu au fost măcinați la această moară în luna mai dacă au fost două perioade în care nu a bătu vântul: în 3 mai de la ora 11 până la ora 21 și în 18 mai de la ora 15 până pe 19 mai la ora 13?



51. Greierele vine să-i ceară furnicii hrană. Aceasta promite că-i dă, dacă îi depozitează produsele adunate cu trudă, în cămară, și aceasta să se facă cât mai ordonat iar într-un dulap să fie doar același fel de produs. În cămara furnicii sunt 4 dulapuri: unul cu 7 rafturi a câte 5 compartimente, altul cu 8 rafturi având tot câte 5 compartimente, al treilea de 12 rafturi de asemenea cu câte 5 compartimente și ultimul de 10 rafturi cu câte 9 compartimente. Cum poate proceda greierele dacă furnica deține 280 boabe de mazăre, 360 boabe de porumb și 900 boabe de grâu?



Test 9

Completați spațiile punctate:

1. Numerele naturale de forma $2x3x$ divizibile cu 2 sunt ... (5 p) (nota 5)
2. Numerele naturale de forma $43y$ divizibile cu 5 sunt ... (5 p) (nota 5)
3. Numerele naturale divizibile cu 5 cuprinse între 16 și 45 sunt ... (5 p) (nota 5)
4. Numerele naturale pare de forma $x2x$ sunt ... (5 p) (nota 5)
5. Numerele naturale impare de forma $18xx$ sunt ... (5 p) (nota 5)
6. Cel mai mic număr natural de patru cifre diferite este ... (5 p) (nota 5)
7. Divizorii numărului 21 sunt ... (10 p) (nota 5)
8. Multiplii comuni ai numerelor 3 și 4 mai mici decât 50 sunt ... (10 p) (nota 7)
9. Numărul numerelor naturale de două cifre divizibile cu 11 este egal cu ... (10 p) (nota 7)
10. Numerele naturale de forma $8ab$ divizibile cu 5, unde $a \neq b$ sunt ... (10 p) (nota 9)
11. Suma a patru numere naturale consecutive este 432. Cel mai mic dintre numere este ... (10 p) (nota 9)
12. Numerele naturale a și b care verifică egalitatea: $a + b = a \cdot b$ sunt ... (10 p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

I.12. Media aritmetică a două numere naturale

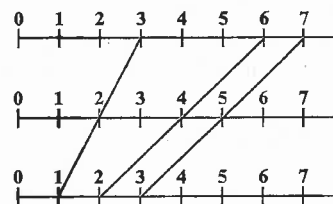


Să observăm:

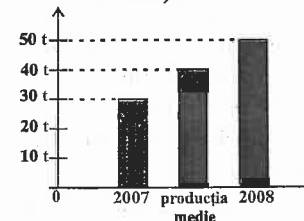
Ce reprezintă media aritmetică?

❖ Diagrama de mai jos asociază perechilor de numere naturale 1 și 3; 2 și 6; 3 și 7, respectiv, numerele:

$$(1 + 3) : 2 = 2; (2 + 6) : 2 = 4; (3 + 7) : 2 = 5.$$



❖ Diagrama de mai jos reprezintă producția de legume a unei ferme legumicole în anii 2007 și 2008. Producția medie este egală cu (30 tone + 50 tone) : 2 = 40 tone.



Cum aflăm media aritmetică a două numere naturale?

❖ Alina are la istorie, pe semestrul I, notele 8 și 10. Ce medie are Alina la istorie pe semestrul I?
Rezolvare: Numărul care reprezintă media la istorie a Alinei îl numim **media aritmetică** a numerelor 8 și 10, pe care o notăm cu m_a și avem: $m_a = (8 + 10) : 2 = 9$.



Rețineți!

Media aritmetică a două numere naturale se poate obține prin împărțirea sumei numerelor la 2.

Exemple:

Numerele	Media aritmetică
15 și 37	$m_a = (15 + 37) : 2 = 26$
8 și 24	$m_a = (8 + 24) : 2 = 16$
1235 și 379	$m_a = (1235 + 379) : 2 = 807$

❖ Comparați media aritmetică a două numere naturale cu cel mai mic număr și, apoi, cu cel mai mare. Ce observați?

Concluzie:

Dacă considerăm numerele naturale a și b cu $a < b$ atunci $a < m_a < b$.

EXERCIIU ȘI PROBLEME

1. Calculați media aritmetică a numerelor:

- | | | | |
|-------------|------------------|---------------------------|-----------------|
| a) 1 și 3; | d) 23 și 87; | g) 2^{56} și 2^{59} ; | j) 245 și 133; |
| b) 4 și 6; | e) 256 și 652; | h) 12 și 48; | k) 2 și 2^7 . |
| c) 5 și 11; | f) 1481 și 9999; | i) 43 și 87; | (nota 5) |

2. Un elev din clasa a V-a are la istorie o notă de 8. a) Ce notă trebuie să mai obțină pentru a încheia semestrul cu media 9 la istorie? b) Acest elev ar putea să obțină media 10 la istorie, dacă mai primește o singură notă în afara celui 8? (nota 7)

3. Comparați media aritmetică a numerelor 29 și 37 cu media aritmetică a numerelor 13 și 53. (nota 7)

4. Aflați numărul natural x știind că media aritmetică a numerelor 236 și x este egală cu 300. (nota 7)

5. Media aritmetică a două numere naturale este egală cu 42, iar unul dintre numere este 64. Aflați celălalt număr. (nota 7)

6. Completați spațiile libere din tabelul de mai jos:

	a	b	media aritmetică
a)	24	104	
b)	15	103	
c)		41	52
d)	11		2011
e)		120	104
f)	442		500

7. Un automobil a mers o jumătate din timpul alocat parcurgerii distanței dintre două localități cu viteza de 60 km/h, iar cealaltă parte cu viteza de 56 km/h. Aflați viteza medie a automobilului.

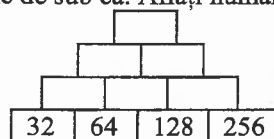
8. Suma a două numere naturale este egală cu 1472. Calculați media aritmetică a numerelor date. (nota 7)

9. Media aritmetică a două numere naturale este 300. Aflați numerele știind că unul dintre numere este de 4 ori mai mare decât celălalt număr.

10. Aflați trei numere naturale știind că două câte două au media aritmetică:

a) 13, 14 și 16; b) 15; 19 și 25.

11. **Piramida mediei aritmetice.** În fiecare casetă se scrie media aritmetică a celor două numere situate în casetele de sub ea. Aflați numărul situat în vârful piramidei.



12. Să se arate că dacă media aritmetică a două numere naturale este un număr natural, atunci cele două numere au aceeași paritate. (nota 9)

13. Dacă numărul natural m este media aritmetică a numerelor naturale a și b ($a < b$), să se arate că $m - a = b - m$. (nota 9)

Test 10

1. Calculați media aritmetică a numerelor:

a) 3 și 5; b) 12 și 24; c) 1381 și 999; d) 2 și 2^6 . (4·5 p = 20 p) (nota 5)

2. Suma a două numere naturale este egală cu 2012. Aflați media aritmetică a celor două numere. (10 p) (nota 5)

3. Produsul a două numere naturale este 12. Aflați media aritmetică a celor două numere știind că aceasta este număr natural. (10 p) (nota 5)

4. Media aritmetică a două numere naturale este 2^7 . Știind că unul dintre numere este 2^3 , aflați celălalt număr. (20 p) (nota 7)

5. Media aritmetică a numerelor naturale n și 2013 este un număr natural. Precizați dacă n este par sau impar. (10 p) (nota 9)

6. Media aritmetică a două numere naturale este 100. Aflați numerele știind că unul este de trei ori mai mare ca celălalt. (10 p) (nota 7)

7. Aflați, trei numere naturale știind că două câte două au media aritmetică: 5, 8 și 12. (10 p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

I.13. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor naturale. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și al inecuațiilor și probleme de organizare a datelor

Ce înțelegem prin ecuație?



Să rezolvăm problemele!

1. Suma a trei numere naturale consecutive este egală cu 27. Aflați numerele.

2. Mat și fratele său Alex au împreună 39 de ani. Când Mat avea 13 ani, Alex avea 6 ani. Ce vârstă vor avea cei doi frați peste 5 ani?

Modelul problemelor:

Notăm cu x cel mai mic număr.

Reprezintă:

Atunci: x numărul mic

$x + 1$ numărul mijlociu

$x + 1 + 1$ numărul mare

Avem

$$x + x + x + 1 + 1 + 1 = 3 + 3x = 27.$$

Deci: $3 + 3 \cdot x = 27$.

Notăm cu y vârsta lui Alex.

Reprezintă:

y vârsta lui Alex

$y + 7$ vârsta lui Mat

$y + y + 7 = 2y + 7 = 39$

vârsta celor 2 frați

$$2 \cdot y + 7 = 39.$$

Scrierile $3x + 3 = 27$ și $2y + 7 = 39$ le numim **ecuații**.

Observație: Cele două probleme sunt asemănătoare (le putem rezolva după același model). Putem alcătui oricât de multe probleme care se rezolvă după același model.

Cum rezolvăm o ecuație?



Să observăm:

Să considerăm ecuația $3x + 3 = 27$.

Înlocuind necunoscuta x pe rând cu numerele naturale 1, 5, 6, 10 obținem propozițiile:

$3 \cdot 1 + 3 = 27$; $3 \cdot 5 + 3 = 27$; $3 \cdot 6 + 3 = 27$ și, respectiv, $3 \cdot 10 + 3 = 27$ care sunt propoziții false.

Înlocuind pe x cu 8 obținem $3 \cdot 8 + 3 = 27$ - o propoziție adevărată.



Să reținem!

A rezolva o ecuație, înseamnă a găsi toate numerele care pot înlocui necunoscuta, astfel încât să obținem propoziții adevărate. Aceste numere se numesc **soluții** ale ecuației.

⇒ 8 este soluție a ecuației $3x + 3 = 27$.

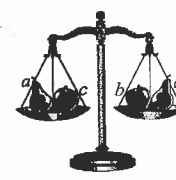
⇒ 16 este soluție a ecuației $2y + 7 = 39$ pentru că $2 \cdot 16 + 7 = 39$.



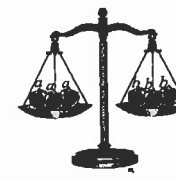
Să observăm:



$$a = b$$



$$a + c = b + c$$



$$3 \cdot a = 3 \cdot b$$



Rețineți! Proprietățile egalității numerelor naturale

Oricare ar fi numerele naturale a, b, c, d avem:

- ⇒ Dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$ și $a + c = b + c$.
- ⇒ Dacă $c \neq 0$ și $ac = bc$, atunci $a = b$.
- ⇒ Dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$ și $ac = bd$.
- ⇒ Dacă $a = b$; $c \neq 0$, iar a și b se împart exact la c , atunci $a : c = b : c$.
- ⇒ Dacă $a = b$; $c = d$; $c \neq 0$; $d \neq 0$, iar a se împarte exact la c și b se împarte exact la d , atunci $a : c = b : d$.

Cum aflăm soluțiile unei ecuații?

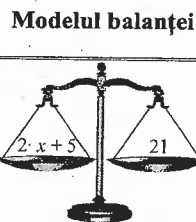
Să rezolvăm ecuația $2 \cdot x + 5 = 21$.

Numim: $2 \cdot x + 5$ = 21
membrul I membrul II



Modelul segmentelor de lungimi egale

Reprezintă:
necunoscuta
membrul I
membrul II

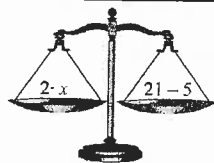


Modelul utilizării proprietăților egalității numerelor naturale

$$2 \cdot x + 5 = 21$$

Scădem 5 din ambii membri ai ecuației:

$x + x$
 $21 - 5 = 16$



$$2 \cdot x + 5 = 21 / - 5$$

$$2 \cdot x = 16$$

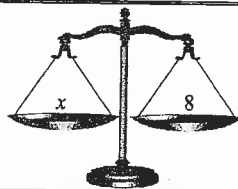
Împărțim 16 la 2 și obținem:

x
8



$$2 \cdot x = 16 / : 2$$

Deci $x = 8$.



$$x = 8$$

Să exersăm:

- ✱ Rezolvați prin cele trei metode ecuația $x + 8 = 31$.
- ✱ Să rezolvăm utilizând proprietățile egalității între numere naturale ecuațiile: $x + 17 = 101$; $3x + 5 = 41$; $3x + x + 9 = x + 102$; $4x - 21 = 74$, unde $x \in \mathbb{N}$.



Rezolvare:

$x + 17 = 101 / - 17$	$3x + 5 = 41 / - 5$	$3x + x + 9 = x + 102 / - x$	$4x - 21 = 74 / + 21$
$x = 101 - 17$	$3x = 41 - 5$	$3x + 9 = 102 / - 9$	$4x = 74 + 21$
$x = 84$	$3x = 36 / : 3$	$3x = 102 - 9$	$4x = 95 / : 4$
	$x = 12$	$3x = 93 / : 3$	$x = 95 : 4$
		$x = 31$	$x \notin \mathbb{N}$

Soluția ecuației este:

84 | 12 | 31 | $\emptyset$



Ce înțelegem prin inecuație?

Să rezolvăm problema:

- ✱ La un număr natural se adaugă 6, rezultatul se înmulțește cu 4, din produs se scade 8 și se obține cel mult 48. Aflați numerele.

Modelul problemei:

Se obține:

Notăm cu x numărul necunoscut.

La x se adună 6.

Se înmulțește $x + 6$ cu 4.

Din produs se scade 8 și rezultatul este cel mult 48.

Scrierea $4 \cdot (x + 6) - 8 \leq 48$ se numește **inecuație**.

$$x + 6$$

$$4 \cdot (x + 6)$$

$$4 \cdot (x + 6) - 8 \leq 48$$

Cum rezolvăm o inecuație?

Să considerăm inecuația $4 \cdot (x + 6) - 8 \leq 48$. Înlocuind necunoscuta x pe rând cu numerele naturale 1, 7, 10 obținem propozițiile: $4 \cdot (1 + 6) - 8 \leq 48$; $4 \cdot (7 + 6) - 8 \leq 48$ și, respectiv, $4 \cdot (10 + 6) - 8 \leq 48$.

Primele două propoziții sunt adevărate, iar a treia propoziție este falsă.



Să reținem!

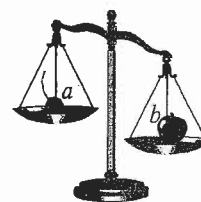
A rezolva o inecuație, înseamnă a găsi toate numerele care pot înlocui necunoscuta încât să obținem propoziții adevărate.

Aceste numere se numesc **soluții** ale inecuației.

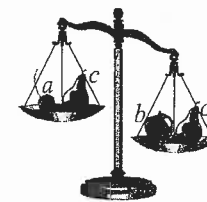
- ⇒ 1 și 7 sunt soluții pentru inecuația $4 \cdot (x + 6) - 8 \leq 48$.
- ⇒ 10 nu este soluție a inecuației.



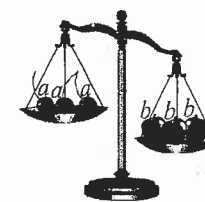
Să observăm:



$$a < b$$



$$a + c < b + c$$



$$3a < 3b$$

Proprietățile inegalității între numere naturale

Numărul natural a este mai mare sau cel mult egal cu numărul natural b dacă există numărul natural c , astfel încât $a = b + c$.

Oricare ar fi numerele naturale a, b, c, d avem:

☞ Dacă $a \leq b$ și $c \neq 0$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot c$.

☞ Dacă $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$.

☞ Dacă $a \leq b$ și $c \leq d$, atunci $a + c \leq b + d$.

☞ Dacă $a \leq b$, iar a și b se împart exact la c , atunci $a : c \leq b : c$.

Cum aflăm soluțiile unei inecuații?

Să rezolvăm inecuația $4 \cdot (x + 6) - 8 \leq 48$ în mulțimea numerelor naturale.

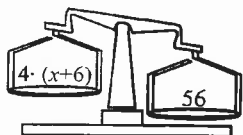
Numim: $4 \cdot (x + 6) - 8$ membrul I 48 membrul II

Modelul balanței



$$4 \cdot (x + 6) - 8 \leq 48 / + 8;$$

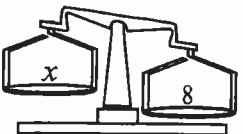
Modelul utilizării proprietăților inegalității numerelor naturale



$$4(x + 6) \leq 56 / : 4;$$



$$x + 6 \leq 14 / - 6;$$



$$x \leq 8.$$

Soluțiile inecuației sunt: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8.

Să exersăm:

☛ Rezolvați prin cele două metode inecuația $x + 9 < 13$, unde $x \in \mathbb{N}$.

☛ Să rezolvăm utilizând proprietățile inegalității între numere naturale inecuațiile:

$x + 5 \leq 8$; $2x + 7 \leq 20$; $2x + x + 9 < x + 17$; $4x - 3 \geq 10$, unde $x \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

$x + 5 \leq 8 / - 5$	$2x + 7 \leq 20 / - 7$	$2x + x + 9 < x + 17 / - x$	$4x - 3 \geq 10 / + 3$
$x \leq 8 - 5$	$2x \leq 20 - 7$	$2x + 9 < 17 / - 9$	$4x \geq 10 + 3$
$x \leq 3.$	$2x \leq 13$	$2x < 17 - 9$	$4x \geq 13$
	$x \leq 6.$	$2x \leq 8 / : 2$	$x \geq 4.$
		$x \leq 4.$	

Mulțimea soluțiilor inecuației este:

{0; 1; 2; 3}	{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}	{0; 1; 2; 3; 4}	$x \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2; 3\}.$
--------------	-----------------------	-----------------	--

EXERCII ȘI PROBLEME

1. Aflați x număr natural din egalitățile:

- a) $17 + x = 71$; e) $x : 19 = 1$; i) $157 - 2x = 49$; m) $(2x - 1) : 7 = 315$;
 b) $x - 18 = 81$; f) $1800 = x : 25$; j) $117 : x = 13$; n) $7x - 9 = 82$;
 c) $236 = 4x$; g) $3x + 1 = 94$; k) $4025 : x = 5$; o) $3(x - 1) + 1 = 49$;
 d) $3x \cdot 1997 = 0$; h) $5x - 7 = 103$; l) $384 : (x + 2) = 4$; p) $5 \cdot (x - 3) = 215$.
 (nota 5)

2. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile: a) $8x = 16$; b) $8x - 4 = 0$; c) $10 - x = 2$; d) $13x - 9 = 4$;
 e) $3(x + 5) = 15$; f) $4x + 5 = 3(x + 1) + 7$; g) $8x + 2 = 3(x + 1) + 4x$.
 a) - (nota 5); b) $\rightarrow$ e) - (nota 7); f), g) - (nota 9)

3. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile: a) $[(x : 2) \cdot 4] : 3 = 60$; b) $\{[(x : 2) : 3] : 4\} : 5 = 1$;
 c) $\{[(x + 2) : 3] \cdot 4\} : 5 = 100$.
 (nota 9)

4. Să se afle numărul natural x din relațiile: a) $5x + 7 = 272$; b) $(8 + 3x) \cdot 14 - 30 = 1762$;
 c) $(72 + x) : 25 = 17$; d) $\{[(3x + 5) \cdot 3 + 5] \cdot 3 + 5\} \cdot 3 + 5 = 281$. a) - (nota 7); b) $\rightarrow$ d) - (nota 9)

5. Rezolvați ecuațiile în $\mathbb{N}$: a) $(4x - 50) : 15 = 2$; b) $7x + 3 = 3x + 2(2x + 3)$;
 c) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$; d) $\{[(7 - 3) \cdot 5 - 2 + 3] : 7 + 9\} : x = 4$;
 e) $[(x + 3) : 200 + 90] : 10 - 10 = 0$; f) $10 \cdot \{x - 10 \cdot [216 + 10 \cdot (24 + 24 : 4)]\} = 1000$. (nota 9)

6. Aflați x din:

- a) $9 - (25 - 16) : 3 = [3 - 3 \cdot (9 - 9)] \cdot x$;
 b) $2 \cdot \{3 \cdot [4 \cdot (5 \cdot x + 1) - 3] - 2\} = 2$;
 c) $\{2 \cdot [14 + (5 + x) : 6] - 5\} : 9 + 7 = 10$;
 d) $2 \cdot \{120 - 2 \cdot [(2 \cdot x + 18) : 15 + 108] : 11\} = 200$;
 e) $2010^0 + \{2 \cdot [3 + (x - 2^2) \cdot 5]\} : 6 \cdot 7 = 2^3$.
 f) $2 \cdot x + 4 \cdot x + \dots + 4024 \cdot x = 2012 \cdot 2013$.
 a) - c) - (nota 9); d) - f) - (nota 10)

7. Determinați numărul natural x din egalitatea: a) $(1996 + x) - (1996 - x) = 10$;
 b) $(1998 + x) - (998 - x) = 1100$; c) $(2000 - x) - (1985 + x) = 3$.
 (nota 10)

8. Aflați numărul natural x din egalitățile: a) $2^x = 1$; b) $3^x = 3$; c) $5^x = 125$; d) $x^3 = 27$;
 e) $x^4 = 1296$.
 (nota 9)

9. Aflați x număr natural știind că p_1 este propoziție adevărată, iar p_2 este propoziție falsă:
 a) $p_1: x \leq 18$; $p_2: x < 10$; b) $p_1: x + 5 > 12$; $p_2: x - 7 \geq 3$.
 (nota 5)

10. Aflați pe „ x ” din: a) $x + 9 < 13$; b) $2 \cdot x + 3 < 12$; c) $9 \cdot x + 3 \leq 12$;
 d) $2 + x : 4 + 21 : 3 \leq 31$; știind că „ x ” este un număr natural nenul.
 (nota 7)

11. Aflați numerele naturale care puse în locul lui x fac adevărate scrierile:
 a) $35 : 7 > x$; b) $35 : 7 \geq x$; c) $(42 : 6) + x \leq 10$.
 (nota 9)

12. Determinați numerele naturale diferite de 0, care puse în locul lui a fac adevărate relațiile: a) $24 \cdot a \leq 72$; b) $a + 15 \leq 23$; c) $72 < a \cdot 3 < 105$; d) $105 \leq a \cdot 15 \leq 195$;
 e) $272 \leq a + 3 \leq 283$.
 (nota 9)

13. Aflați numerele naturale n , știind că:

a) $1 < (4 \cdot n + 3) : 9 \leq 3$; b) $7 < 9(n - 6) - 2 \leq 25$.

(nota 10)

14. Determinați numerele naturale x , știind că:

a) $6x \leq 57$; b) $33 - 9 : 3 + 6 \cdot x < 67$; c) $100 + 8 \cdot x \leq 148$; d) $30 > (10 + x) \cdot 2 - 3 > 20$.

(nota 9)

15. Care numere cuprinse între 100 și 200 împărțite la 5 dau restul 4?

(nota 9)

16. Găsiți cel mai mare număr natural de două cifre care împărțit la 12 dă restul 7.

(nota 9)

17. Găsiți cel mai mic număr natural care împărțit la 120 dă restul 45.

(nota 9)

18. Rezolvați inecuațiile știind ca x este număr natural: a) $(x + 5) : 4 \leq 2$; b) $7x \leq 8$;

c) $5 \cdot (4x + 17x) : 7 < 40$; d) $8(7x + 8x) : 15 \leq 9 + 8x$. a), b) - (nota 7); c) - (nota 9); d) - (nota 10)

19. Aflați cifra x în baza 10 din: $\overline{x0} = 5 \cdot x \cdot (164 - 2 \cdot x^2)$.

(nota 10)

20. Să se afle x din: $2x + 4x + \dots + 3994x = 1997 \cdot 1998$.

(nota 10)

21. Să se rezolve ecuația: $2x + 4x + 6x + \dots + 100x + 102 = x + 3x + 5x + \dots + 101x$.

(nota 10)

22. Să se rezolve ecuația: $11 + 12 + 13 + \dots + 100 = 5 \cdot (1000x - 1)$.

(nota 10)

23. **Problemă aplicativă.** Rezultatele obținute de clasa a V-a A la teza de matematică pe semestrul I sunt trecute în tabelul de mai jos:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	—	—	1	1	2	5	4	7	3	2

Aflați:

a) Câți copii au note mai mici decât 6?

b) Câți copii au note mai mari decât 8?

c) Câți elevi au note mai mari sau egale cu 7?

(nota 7)

24. **Problemă aplicativă.** Situația vânzărilor dintr-o zi a produselor de cofetărie de la cofetăria Diana este prezentată în tabelul următor:

Produsul	Prăjituri cu fructe	Prăjituri cu ciocolată	Torturi	Prăjituri cu frișcă
Numărul prăjiturilor vândute	250	280	120	180

Aflați:

a) Câte prăjituri cu ciocolată și cu frișcă s-au vândut?

b) Câte produse s-au vândut în total?

(nota 7)

25. **Problemă aplicativă.** Toți elevii unei școli au susținut testul inițial de matematică. Rezultatele obținute sunt reprezentate în graficul alăturat.

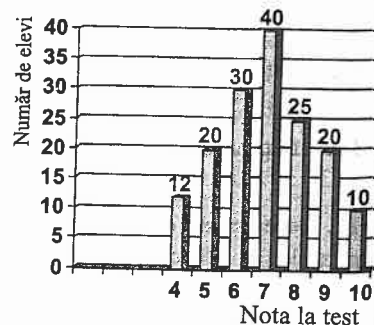
Completați spațiile punctate:

a) La testul inițial au participat ... elevi.

b) Au luat note sub 6 ... elevi.

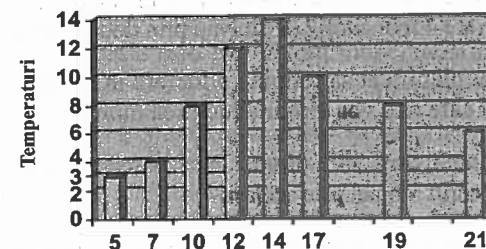
c) Au luat note peste 7 ... elevi.

(nota 7)

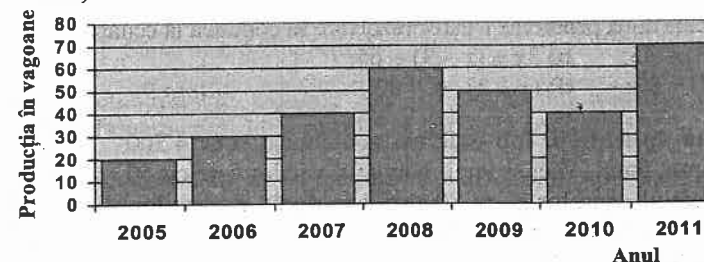


26. **Problemă aplicativă.** Graficul de mai jos reprezintă valorile temperaturii înregistrate într-o zi de toamnă în orașul Botoșani. Pe axa orizontală este reprezentat timpul în ore, iar pe direcția axei verticale, temperatura, în grade Celsius. Organizați datele din această reprezentare grafică sub forma unui tabel.

(nota 7)



27. **Problemă aplicativă.** Graficul din figura de mai jos reprezintă producția de porumb a unei ferme agricole (am reprezentat producția unui an printr-un dreptunghi); baza lui reprezintă un an, iar înălțimea este producția în vagoane (un vagon are 10 tone)



(nota 7)

28. O pompă scoate 960 găleți de apă în 5 ore. Câte găleți de apă scoate pompa în 8 ore?

(nota 7)

29. 7 penare costă 77 lei. Cât costă 13 penare? Dar 3 penare? Dar 25 penare (penarele sunt de același fel)?

(nota 7)

30. Pentru 5 biciclete se plătesc 2 500 lei. Câți lei se vor plăti pentru 3 biciclete de același fel?

(nota 7)

31. 5 muncitori sapă într-o zi 30 m de șanț. Câți metri de șanț sapă 11 muncitori într-o zi (norma de lucru este aceeași)?

(nota 7)

32. 7 combine recoltează într-o zi 35 hectare de grâu. Câte combine sunt necesare pentru a recolta în 15 zile 1 500 ha de grâu?

(nota 7)

33. La o librărie s-au vândut 298 culegeri de probleme. Ce sumă s-a încasat în total, dacă 7 culegeri costă 105 lei?

(nota 7)

34. Un tren accelerat parcurge 320 km în 4 ore. Dacă până la destinație mai circulă încă 3 ore cu aceeași viteză, ce distanță a parcurs în total?

(nota 9)

35. Un automobil parcurge 240 km în 4 ore. Ce distanță va parcurge automobilul după 5 ore și jumătate de mers, circulând cu aceeași viteză?

(nota 9)

36. 240 de vaci de la o fermă zootehnică consumă într-o zi 6 tone de furaje. Ce cantitate de furaje consumă vacile rămase după ce au fost vândute 30 de vaci într-o zi (rația este aceeași)? (nota 9)

37. 8 muncitori pot termina o lucrare în 24 de zile. În cât timp pot termina aceeași lucrare 4 muncitori? (Rezolvați prin două moduri).

38. 10 muncitori și-au planificat să termine o lucrare în 30 de zile. Dacă pleacă pe alt șantier 4 muncitori, în câte zile vor termina lucrarea muncitorii rămași? (nota 9)

39. În 6 ore, prin 4 robinete, curg 24 hl de apă. În câte ore, prin 5 robinete, curg 25 hl de apă (debitul fiecărui robinet este același)? (nota 10)

40. Suma a două numere naturale este 148. Al doilea număr este mai mic decât primul cu 18. Aflați numerele.

41. Suma a două numere naturale este 101. Aflați cele două numere știind că primul mărit cu 17 este cu 31 mai mic decât al doilea mărit cu 11. (nota 7)

42. Alcătuiți câte două probleme a căror rezolvare să conducă la ecuațiile:

a) $2x + (x + 3) = 45$; b) $3x + (x - 3) = 65$;

c) $x + (3x - 7) = 33$; d) $(x + 3) : 5 = 42$.

(nota 9)

43. **Problemă aplicativă.** Într-o fermă zootehnică sunt 4 500 capete de: capre, porci, vaci și viței. Numărul vacilor este cu 50 mai mare decât al caprelor și cu 80 mai mic decât al porcilor. Câte animale sunt de fiecare fel, dacă numărul oilor reprezintă dublul numărului de porci? (nota 9)

44. **Problemă aplicativă.** La o fermă sunt: găini, găște și rațe, în total 518 păsări. Știind că numărul găștelor este cu 74 mai mare decât cel al găinilor, iar rațe sunt cu 120 mai multe decât găini, să se afle câte păsări sunt din fiecare categorie. (nota 9)

45. Suma a 3 numere naturale consecutive este 2 010. Să se afle numerele. (nota 7)

46. Suma a cinci numere naturale pare consecutive este 40. Aflați numerele. (nota 7)

47. Să se afle două numere știind că suma lor este 2001 și diferența lor este 201. (nota 7)

48. Dacă din dublul unui număr scădem 49 obținem 101. Aflați numărul. (nota 7)

49. Dacă la triplul unui număr adunăm 40 obținem 100. Aflați numărul. (nota 7)

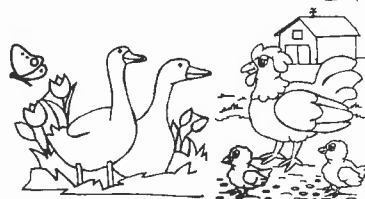
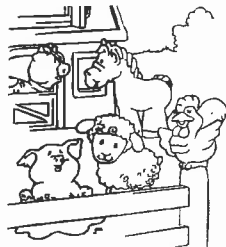
50. Ionel are de 5 ori mai mulți bani decât Mihai. Împreună au 420 lei. Aflați ce sumă are fiecare dintre ei. (nota 7)



(nota 9)



(nota 7)



51. Suma a două numere naturale este 4320. Aflați numerele dacă unul este cu 450 mai mare decât celălalt. (nota 7)

52. Diferența a două numere naturale este 600. Aflați numerele știind că unul este de trei ori mai mare decât celălalt. (nota 7)

53. Suma a două numere naturale este 190. Aflați numerele știind că unul este cu 10 mai mic decât triplul celuilalt. (nota 7)

54. M-am gândit la un număr. L-am adunat cu 16. Rezultatul l-am înmulțit cu 3. Din noul rezultat am scăzut 96 și am obținut numărul la care m-am gândit. La ce număr m-am gândit? (nota 9)

55. Suma a două numere naturale este 568. Aflați numerele știind că restul împărțirii celui mai mare la cel mai mic este 28 și câtul 14. (nota 7)

56. Suma a două numere este 166. Aflați cele două numere știind că împărțind pe cel mai mare la cel mai mic se obține câtul 6 și restul 19. (nota 7)

57. Într-o operație de împărțire, suma dintre deîmpărțit și împărțitor este 2 016, câtul este 105, iar restul 2. Să se afle deîmpărțitul. (nota 7)

58. Diferența a două numere naturale este 95. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 11 și restul 5. Aflați cele două numere. (nota 7)

59. Determinați numerele naturale n care împărțite la 48 dau ca rest pătratul câtului. (nota 10)

60. Aflați numerele naturale nenule care împărțite la 69 dau restul egal cu cubul câtului. (nota 10)

61. Suma a opt numere naturale impare este 112. Aflați numerele. (nota 9)

62. Un tată are 40 de ani și trei copii de 10, 8 și 6 ani. După cât timp tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor la acea dată? (nota 9)

63. Suma a trei numere naturale este 128. Primul număr împărțit la al doilea dă câtul 2 și restul 14, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 3 și restul 8. Aflați numerele. (nota 10)

64. În două clase ale unei școli sunt 54 de elevi. Dacă s-ar muta doi elevi din prima clasă în cealaltă, prima ar avea cu 2 elevi mai mult decât a doua. Câți elevi sunt în fiecare clasă? (nota 10)

65. Un țăran are de 5 ori mai multe găini decât rațe. Dacă vinde 5 găini și cumpără 3 rațe, atunci numărul găinilor devine de 3 ori cât al rațelor. Câte găini și câte rațe a avut? (nota 10)

66. Două bucăți de pânză aveau aceeași lungime. După ce s-a vândut 4 m dintr-o bucată și 22 m din cealaltă, în prima bucată a rămas de 3 ori mai multă pânză decât în a doua. Câți metri de pânză au fost în fiecare bucată? (nota 10)



67. Într-o tabără pentru elevi sunt 36 de căsuțe cu două și respectiv trei camere. Câte căsuțe cu două camere și câte cu trei camere sunt, dacă numărul camerelor este 101? (nota 10)



68. Dacă într-o sală de clasă se așază câte doi elevi într-o bancă, rămâne un elev în picioare. Dacă se așază câte 3 elevi într-o bancă, rămân 3 bănci libere, iar într-o bancă se așază un singur elev. Câți elevi și câte bănci sunt în sală? (nota 10)

69. În cadrul unui concurs un elev obține pentru 10 răspunsuri 130 de puncte. Să se afle câte răspunsuri au fost corecte și câte greșite, știind că pentru un răspuns corect a obținut 25 de puncte, iar pentru un răspuns greșit a pierdut 15 puncte. (nota 10)

70. Aflați numerele naturale x și y știind că $3^x + 5^y = 134$. (nota 10)

71. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația: $4^x + 3^y + 2^z = 59$. (nota 10)

72. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația: $x^2 + x + 5y = 1998$. (nota 10)

73. a) Scrieți numărul 3^5 ca o sumă de trei numere naturale consecutive;
b) Scrieți numărul 5^7 ca o sumă de cinci numere naturale consecutive;
c) Scrieți numărul 7^{1997} ca o sumă de șapte numere naturale consecutive. (nota 10)

74. Smaranda și Emma colecționează timbre. În fiecare săptămână Smaranda mai adaugă la colecție câte 15 timbre, iar Emma câte 9 timbre. În 31 decembrie Smaranda avea 312 timbre iar Emma 408. În 2 septembrie din anul următor câte timbre vor avea fiecare? Este posibil ca la un moment dat, colecțiile fetelor să aibă același număr de timbre? (nota 10)

⌚ Test 11

1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

- a) $x + 205 = 317$; d) $205 - x = 80$; g) $x : 21 = 20$;
b) $750 + x = 800$; e) $18 \cdot x = 324$; h) $1296 : x = 36$.
c) $x - 340 = 100$; f) $x \cdot 13 = 169$; (8 · 3p = 24p) (nota 5)

2. Verificați dacă numărul 3 este soluție a inecuației:

- a) $x + 5 < 9$; b) $x + 6 \leq 7$; c) $x - 2 \leq 1$; d) $x - 3 < 8$. (4 · 4p = 16p) (nota 5)

3. Rezolvați inecuațiile: a) $x + 4 < 9$; b) $2x + 3 < 10$; c) $8x + 7 \leq 13$; d) $4 \leq x + 2 \leq 10$, unde x este număr natural nenul. (4 · 5p = 20p) (nota 7)

4. Un număr natural se înmulțește cu 5. Din rezultat se scade 15. Noul rezultat se împarte exact la 4, iar din el se scade 4 și se obține 96. Aflați numărul. (10p) (nota 9)

5. Aflați numerele naturale x și y știind că: $(x - 3)(y + 4) = 12$. (10p) (nota 9)

6. Împărțind două numere naturale, obținem câtul 14 și restul 3. Dacă împărțim suma lor la diferența lor, obținem câtul 1 și restul 26. Aflați numerele. (10p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

I.14. Numerele naturale

Recapitulare pentru lucrarea scrisă

1. Se consideră numărul 111213...484950. a) Câte cifre are acest număr? b) Câte cifre de 1 conține numărul dat? (nota 7)

2. Scrieți cel mai mare număr de 6 cifre care să nu fie mai mare decât 677 777 și să nu aibă cifre care să se repete. (nota 5)

3. Reprezentați pe o axă punctele ale căror coordonate sunt numere naturale care verifică una din condițiile: a) sunt cel mult egale cu 5; b) sunt cuprinse între 2 și 12 și sunt pare; c) sunt cuprinse între 1 și 13 și sunt impare. (nota 5)

4. Pe axa numerelor se consideră punctele: A, B, C, D, E, F de coordonate: 1, 3, 6, 9, 12, 15, unitatea de măsură fiind de 1 cm. Determinați lungimile segmentelor: AB, AC, AF, BD, BE, DF . (nota 5)

5. Calculați: a) $6 \cdot 5 \cdot 0 + 50 + 5 \cdot 10 + 0 : 7$; b) $15\,260 : 14$; c) $8\,750 : 50 : 25 + 1 \cdot 30 + 5 \cdot \{32 : 8 + 5 \cdot [40 - 8 \cdot (200 : 5 - 72 : 2)]\}$. (nota 5)

6. Calculați: a) $1\,234 - 432 - 321$; b) $1\,357 \cdot 246$; c) $67\,898 : 34$;
d) $(3 + 4 \cdot 9) : (123 - 2 \cdot 55) + 13 \cdot 14$. (nota 5)

7. Suma a cinci numere naturale distincte nenule este 17. Aflați numerele. (nota 7)

8. Suma a 60 de numere naturale, nenule și distincte, este egală cu 1831. Arătați că cel puțin unul dintre ele este mai mare decât 60. (nota 9)

9. Care este cifra cu care se termină produsul $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 19$? (nota 10)

10. Aflați termenul necunoscut din egalitatea:
 $\{2 \cdot [14 + (5 + x) : 6] - 5\} : 9 + 7 = 10$. (nota 7)

11. Calculați cât mai repede: a) $(4 + 6 + 8 + 10) : (2 + 3 + 4 + 5)$;
b) Dacă $a = 3$, $b + c = 7$ și $x + y = 10$, calculați: $a + 4b + 4c$ și $ax + ay + ab + ac$. (nota 9)

12. Aflați trei numere naturale a, b, c care verifică simultan, egalitățile: $a + b = 80$;
 $a + c = 90$; $b + c = 100$. (nota 7)

13. Se știe că: $ab + ac + a = 180$ și $b + c = 17$. Aflați a . (nota 7)

14. Un comerciant are suma de 500000 lei pe care o cheltuiește în 3 zile. În prima zi cheltuiește 120000 lei, iar a doua zi cheltuiește cu 25000 lei mai mult decât în prima zi. Aflați: a) Câți lei cheltuiește comerciantul în primele două zile? b) Câți lei cheltuiește comerciantul în ultimele două zile? (nota 7)

15. Produsul a două numere naturale este 20. Aflați suma numerelor. Câte soluții are problema? (nota 7)

Completați spațiile punctate

16. Un număr este mai mare decât altul cu 311, iar suma lor este 583. Aflați numerele. (nota 7)

17. Împărțind un număr natural la 2 se poate obține restul (nota 7)

18. Suma dintre câtul și restul împărțirii $44502 : 15$ este (nota 7)

19. Produsul dintre câtul și restul împărțirii $43321 : 11$ este ... (nota 7)
20. Împărțind două numere naturale obținem câtul 16 și restul 4. Dacă suma celor două numere este 259, atunci numerele sunt ... (nota 7)
21. Suma resturilor ce pot fi obținute la împărțirea unui număr natural la 99 este ... (nota 9)
22. Cel mai mare număr natural de trei cifre care împărțit la 11 dă restul 7 este ... (nota 7)
23. Cel mai mic număr natural de patru cifre care împărțit la 23 dă restul 20 este ... (nota 7)
24. Numărul natural care împărțit la 106 dă câtul egal cu dublul restului și restul mai mare ca 104, este ... (nota 7)
25. a) Câtul împărțirii $405 : 4005$ este ... b) Suma a două numere naturale este 512. Împărțind numărul mai mic la cel mare obținem restul 250. Cele două numere sunt ... (nota 7)
26. Într-o împărțire împărțitorul este de două ori mai mare decât restul, restul este cu 5 mai mare decât câtul, iar câtul este 15. Aflați deîmpărțitul. (nota 7)
27. Împărțitorul și câtul unei împărțiri sunt 5 și, respectiv, 4. Aflați deîmpărțitul și restul. (nota 7)
28. a) Aflați numărul natural care împărțit la 18 dă câtul 27 și restul 16. b) Aflați cel mai mic număr natural de patru cifre care împărțit la 83 dă restul 57. (nota 7)
29. Determinați suma tuturor numerelor naturale care dau câtul 100 la împărțirea cu 5. (nota 9)
30. Suma a două numere naturale este 103. Determinați numerele știind că restul împărțirii celui mai mare la cel mai mic este 3 și câtul 4. (nota 7)
31. Pentru numerotarea paginilor unei cărți s-au folosit 588 de cifre. Câte pagini are cartea? (nota 9)
32. Determinați perechile de numere naturale (a, b) care satisfac egalitatea: $[(a \cdot b + 408) : (646 - 573)] \cdot 10 + 1132 = 1192$. (nota 7)
33. Diferența a două numere naturale este 865. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 8 și restul 25. Aflați cele două numere. (nota 7)
34. Aflați cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 15 dă restul 7. (nota 9)
35. Să se afle cel mai mic număr natural nenul care împărțit la 2001 să dea: a) câtul de 5 ori mai mic decât restul; b) câtul de cinci ori mai mare decât restul. (nota 9)
36. Câte numere naturale de trei cifre împărțite la 27 dau restul 5? (nota 9)
37. Să se determine deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul împărțirii unor numere naturale, știind că diferența dintre deîmpărțit și rest este egală cu 6. (nota 7)
38. Aflați câtul și restul următoarelor împărțiri: a) $1331 : 12$; b) $44456 : 56$; c) $8888 : 33$. (nota 7)
39. Aflați numărul natural care împărțit la 28 dă câtul 17 și restul 10. (nota 7)
40. Suma a două numere naturale este 192, împărțind numărul mai mare la numărul mai mic, obținem câtul 11 și restul 12. (nota 7)
41. Câte numere naturale de patru cifre, împărțite la 115, dau restul 100? Determinați suma acestor numere. (nota 9)

42. Împărțind numărul a la numărul b obținem câtul 4 și restul 5. Aflați câtul și restul împărțirii sumei $a+b$ la b și a diferenței $a-b$ la b . (nota 9)
43. Calculați: a) $7 \cdot 8 + 112 : 2 - 112 + 1997$; b) $1995 + 1995 \cdot 1996 - 1997 \cdot 1994$; c) $10 + 20 \cdot \{30 + 400 : [50 - 600 : (70 - 80 : 8)]\}$. (nota 5)
44. Precizați exponentul următoarelor puteri: a) 7^{15} ; b) 283; c) 108^{108} ; d) 10^{73} ; e) 91^0 .
45. Scrieți ca puteri cu baza 3 numerele: a) 9; b) 81; c) 1; d) 9^{11} ; e) 27^5 . (nota 7)
46. Precizați exponentul următoarelor puteri, dacă le considerăm puteri cu baza 2. a) 2^{18} ; b) 8^5 ; c) 16^{31} ; d) 7^0 ; e) 64^{25} . (nota 5)
47. Calculați:
a) $2^5 - 3^3$; c) $(5^2 \cdot 2^3) : 10$; e) $7^2 + 109^0$;
b) $7^1 + 1^7 + 71^0$; d) $(5^3 - 10^2) : 5$; f) $2^3 + 2 \cdot (7^2 - 3 \cdot 4^2)$. (nota 7)
48. Stabiliți dacă următoarele puteri sunt cuburi perfecte și în caz afirmativ precizați baza. a) 5^{15} ; b) 1000^2 ; c) 8^{11} ; d) 27^{14} ; e) 216^5 . (nota 7)
49. Precizați baza următoarelor puteri: a) 5^{53} ; b) 7^{27} ; c) $(5^3)^5$; d) 417; e) 201^0 . (nota 5)
50. Stabiliți ce relație există între următoarele puteri:
a) 5^{71} și 3^{71} ; b) 8^{20} și 4^{30} ; c) 27^{13} și 9^{20} ; d) 125^2 și 5^4 ; e) 1000^{12} și $(10^2)^{15}$. (nota 7)
51. Scrieți ca pătrat perfect: a) 9^{20} ; b) 9^{11} ; c) 8^6 ; d) 100^{41} ; e) 53^{10} . (nota 7)
52. Efectuați:
a) $107^0 + 0^{107} + 107^1$; e) $(7^5)^3 : (7^3 \cdot 7^7 \cdot 7^2 \cdot 7)$;
b) $53^2 - 9^{17} : (9^4)^4$; f) $2^{3^2} : 2^{2^3}$;
c) $5^2 + 3 \cdot (2^4 - 3 \cdot 5^1)$; g) $10^{10} : (5^7 \cdot 2^7)$;
d) $7^2 + (3^{15} + 3^{20} : 3^5 + 3^{10} \cdot 3^5) : (3^4)^4$; h) $(6^{25} \cdot 6^{14})^2 : (6^{15})^5$. (nota 7)
53. Determinați x din egalitățile:
a) $x \cdot 2^5 = 2^7$; d) $(7^5)^3 \cdot 7^{12} = 7^{3x}$; g) $25^x : 5^7 = 125$;
b) $5^x \cdot 5^7 = 5^{15}$; e) $11^x : 11^7 = 11^4$; h) $4^{24} : 2^x = 8^5$. (nota 7)
54. Precizați câte zerouri conțin următoarele numere:
a) $N_1 = 10^{17}$; d) $N_4 = 2^{23} \cdot 5^{20}$; g) $N_7 = 45^n \cdot 2^{n+1}$;
b) $N_2 = 1000^{23}$; e) $N_5 = 8^{45} \cdot 15^{115}$; h) $N_8 = 8^{n+1} \cdot 5^{3n-1}$,
c) $N_3 = 2^5 \cdot 5^5$; f) $N_6 = 4^{36} \cdot 25^{20}$; unde $n \in \mathbb{N}^*$. (nota 7)
55. Efectuați:
a) $(10^2 - 6^2) : 2^3$; d) $(7^{15} + 3^{240}) : (5^{72} : 5^{70} : 5)$;
b) $1 + 2 \cdot [3^2 \cdot (13 \cdot 2 - 5^2) + 57^0]$;
c) $9^{25} : (3 \cdot 3^{11})^4 + (6 + 2 \cdot 105) : 6^2$; e) $[(3^3)^{15} : 3^{6^2} - 3^{3^2}] \cdot 513^{23}$. (nota 7)
56. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ știind că:
a) $a = b^2$; d) $\overline{ab} + \overline{ba}$ este pătrat perfect;
b) a este cub perfect și $b : 3 \in \mathbb{N}$; e) $\overline{ba}$ este cub perfect. (nota 9)
- c) $\overline{ab} + 1$ este pătrat perfect;

Completați spațiile punctate:

57. Un triplet cu pătrate perfecte consecutive este ... (nota 7)
58. Ultima cifră a lui $N = 216^{2009} - 49^{2009}$ este ... (nota 7)
59. Cel mai apropiat pătrat perfect de numărul 50 este ... (nota 7)
60. Cel mai apropiat cub perfect de numărul 70 este ... (nota 7)
61. Completați spațiile marcate cu $\square$ cu unul dintre simbolurile $<$, $>$ sau $=$:
 a) $5^8 \square 5^5$; c) $3^6 \cdot 5^6 \square 4^{12}$; e) $(10^3)^{10} \square 10^{45} : 10^{12}$;
 b) $2^7 \square 2^6 + 2^6$; d) $9^{11} \square 3^{20} \cdot 3^2$; f) $9^5 \square 9^5 + 9^0$. (nota 9)
62. Efectuați:
 a) $4 + 5 \cdot [7^{29} : (7^7)^4 - 5^{13}]$; c) $(3^7 + 2 \cdot 3^7 + 2 \cdot 3^8) : 3^8$;
 b) $(6^2 + 8^2) : 5^2$; d) $101 - 2^2 \cdot (2^4 + 3^2)$. (nota 9)
63. Aflați restul împărțirii numărului $N = 72^{72} - 27^{27}$ la 10. (nota 9)
64. Aflați cea mai mare valoare a lui x pentru care:
 a) $2^x \leq 64$; b) $x^3 < 300$; c) $5^x \cdot 5^{2x} \cdot 5^{3x} \leq 25^{18}$. (nota 9)
65. Calculați: $(1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2009}) : 2^{2000}$. (nota 9)
66. Calculați: a) $(6+4)^3 - (10-9)^{11} - 998^0$; b) $\left\{ \left[(6^2 + 8^2)^2 : 50^2 \right]^3 - 3^3 - 4^2 \right\} : 7$. (nota 7)
67. Determinați numărul natural n care verifică egalitățile: a) $n^2 = 36$; b) $n^3 = 64$;
 c) $n^4 = 1$; d) $n^2 - 3^2 = 4^2$; e) $n : (4^2)^2 = 1$; f) $4^n + 4^{n-1} = 80$. (nota 7)
68. 1. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile: a) $3x - 1 = x + 1$; b) $4x - 5 = 3$; c) $x : 4 = 6$; d) $4x = 40$.
 2. Să se afle un număr, știind că înmulțindu-l cu 5 obținem același rezultat ca atunci când îl adunăm cu 60. (nota 7)
69. Alcătuiți o problemă după exercițiul $(1230 - 230) \cdot 25 + 1375 : 25$. (nota 7)
70. Calculați:
 a) $2 \cdot 2^0 \cdot 2^3 : 2^2$; f) $2^0 + 3^0 + (2^0)^3 + 2^3 : 1^4$; j) $3^{2^2} \cdot (3^2 - 2^2) - (3^2 + 2)$;
 b) $3^3 \cdot 3^4 : 3^5$; g) $2 + 3 + 4 + 5 - 3^2$; k) $2^2 \cdot 2^4 - (2^2)^4 : 2^2 + 2^0 - 0^3$;
 c) $2^2 + 2 + 2^3 - 3^2$; h) $(4^3)^2 : 2^{10} - 2^{2^3} : 2^6$; l) $0^1 : 1^0 + 3^4 : 9^2 - 4^{3^2} : 16^{16} \cdot 2^{3^5} : 32^7$;
 d) $(2^3)^2 : (2^2)^3$; i) $2^{79} : (2^{3^2} \cdot 2^{4^5}) + (16 + 2 \cdot 154) : (3^2 \cdot 2^2)$; m) $[2^2 \cdot 5^3 + (2^9 \cdot 75 \cdot 3^4) : (2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^5)] : 2^2$;
 e) $2^{2^3} \cdot 2^{3^2} : (2^2)^5$; n) $[2^2 \cdot 5^3 + (2^9 \cdot 75 \cdot 3^4) : (2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^5)] : 2^2$. (nota 10)
71. Fie numerele: $a = 27^{1^2} : 9^{3^{0^1}} \cdot 3^{3^{1^2}} : 3^{1^{2^3}}$; $b = 3^{2^1} : 3^{1^2} \cdot 9^{3^1} : 3^{3^1}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor: $a < b$; $a = b$; $a > b$. (nota 10)
72. Fie numerele: $a = 2^{2^2}$; $b = 2^{2^2}$; $c = 222$; $d = 22^2$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor: $a < c < b < d$; $b < c < d < a$; $a < c < d < b$. (nota 10)
73. Suma a 13 numere naturale impare este 168. Arătați că cel puțin două dintre ele sunt egale. (nota 9)

74. Calculați suma: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$.

75. Aflați numerele de două cifre care verifică egalitatea.

76. Stabiliți dacă există două numere naturale care adunate dau ... și scăzute dau diferența un număr par.

77. Cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 13 dă restul 9 este.

78. Dacă numărul $N = \overline{ab} + \overline{ba}$ este pătrat perfect atunci $a + b = \dots$.

79. Ultimele 2003 cifre ale numărului 270^{2002} sunt ... (nota 10)

80. Se dau numerele: $n = 3^{40} : (3^3 \cdot 3^{34}) \cdot (3^2 + 3 \cdot 25) : 42$ și $m = 411\,014 - 411 \cdot 2^3 \cdot 5^3 - 2^3 \cdot 7^2 : 28$. Calculați: m^n , n^m , $m + n$, $m \cdot n$. (nota 10)

81. Alexandru are de două ori mai mulți bani decât sora sa. Dacă Alexandru i-ar da surorii sale 12 lei, atunci ei ar avea aceeași sumă. Câți lei are Alexandru? (nota 7)

82. Determinați $x \in \mathbb{N}$ știind că $x \leq 20$ și $(x + 3) : 5$. (nota 7)

83. Arătați că numărul $N = 6^{200} + 5^{1999} - 4^{1988}$ este divizibil cu 5. (nota 9)

84. Arătați că numărul: $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 + 1997$ nu este pătrat perfect. (nota 9)

85. Suma a patru numere naturale impare consecutive este 64. Aflați numerele. (nota 7)

86. a) Suma a 9 numere naturale nenule distincte este 47. Aflați numerele.
 b) Suma a 7 numere naturale consecutive este 126. Aflați numerele. (nota 7)

87. Calculați cât mai repede: a) $(4 + 6 + 8 + 10) : (2 + 3 + 4 + 5)$;
 b) $(4 + 8 + 12 + 16 + 20) : (2 + 4 + 6 + 8 + 10)$;
 c) $(6 + 12 + 18 + \dots + 96) : (1 + 2 + 3 + \dots + 16)$;
 d) $(10 + 100 + 1000 + \dots + 1000\,000) : (1 + 10 + 100 + \dots + 100000)$. (nota 7)

88. Care din următoarele numere este pătrat perfect?
 7^5 ; 7^8 ; $7^2 + 7^3$; $7^4 + 9 \cdot 7^5$; $7^n + 9 \cdot 7^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). (nota 9)

89. Să se determine numerele naturale n pentru care următoarele relații sunt adevărate:
 a) $2^n = 16$; b) $3^n = 81$; c) $5^n < 36$; d) $2^{n+1} < 64$; e) $4^n < 6^n$; f) $4^n \geq 6^n$. (nota 9)

90. Calculați:
 a) $10 + 9 \cdot (8 - 8) + 30 \cdot 20 - 61 \cdot 10$; b) $320 - 14 \cdot 13 + 206 \cdot [33 + 84 : 14] : 39$;
 c) $2^0 + 5^1 + 4^2 + 3^3 - 6^2$. a) (nota 5); b) și c) (nota 7)

91. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile: a) $x + 134 = 576$; b) $2\,345 - x = 899$; c) $2x + 5 = 17$;
 d) $3(2x + 5) - 4 = 23$; e) $[15 \cdot (10x - 11) - 120] \cdot 10 - 25 = 125$.
 a) $\rightarrow$ c) (nota 5); d) și e) (nota 7)

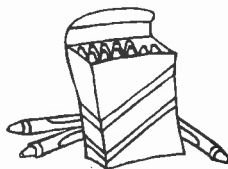
92. Să se determine pătratele perfecte de două cifre $\overline{ab}$ pentru care numerele a și b sunt pătrate perfecte. (nota 10)

93. Calculați: a) $9 + 99 + 999 + 9999$; b) $310 - 14 \cdot 11 + 205 \cdot [23 \cdot 12 - (34 + 195 : 15) : 47]$;
 c) $2^6 + 5^4 + 3^3 + 7^2 + 4^0 + 6^1$; d) $180 : (2^2 \cdot 3^2) + (2^5 \cdot 3)^2 : 96 + 1999^0$.
 a) și b) (nota 7); d) și c) (nota 9)

94. Se știe că $ab + ac = 560$ și $b + c = 14$, aflați a . (nota 7)

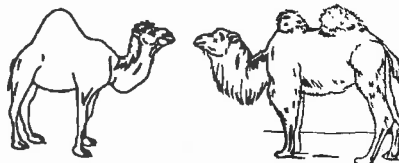
120. Există un număr natural care împărțit la 21 dă restul 7 și împărțit la 35 să dea restul 3? (nota 9)

121. Se pot pune 54 de creioane în 10 penare astfel încât în fiecare penar să fie cel puțin un creion și să nu existe cutii cu același număr de creioane? Dar 56 de creioane? (nota 10)



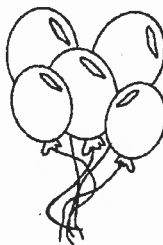
122. Aflați ultima cifră a numărului $n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}$. Este numărul n divizibil cu 10? (nota 9)

123. Într-o caravană compusă din cămile (două cocoșe) și dromaderi (o cocoșă) sunt 40 de capete și 60 de cocoșe. Aflați câți dromaderi sunt. (nota 9)



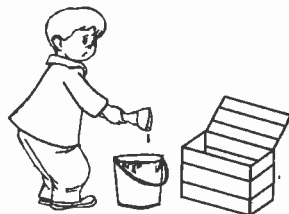
124. Cu trei ani în urmă, Ionuț și Anca aveau împreună 15 ani. Câți ani au acum împreună cei doi copii? (nota 7)

125. Ionică umflă 16 baloane la fiecare trei minute. Câte baloane vor fi umflate după 3 ore, dacă fiecare al optulea balon este spart imediat după ce este umflat? (nota 9)



126. Astăzi Gigel este de trei ori mai în vârstă decât era acum 30 de ani. Ce vârstă are astăzi Gigel? (nota 9)

127. Ionuț trebuie să vopsească pe exterior patru lăzi din lemn de forma unui cub cu muchia de 1 metru. Capacul trebuie vopsit și pe interior. Dacă un kilogram de vopsea ajunge pentru 4 m^2 , de ce cantitate are nevoie și cât va plăti știind că un kilogram costă 26 lei? (nota 10)



I.15. Variante pentru teza pe semestrul I

Test 12 (Varianta 1)

Completați spațiile punctate:

- Puterea a II-a a numărului 11 este egală cu... (5p) (nota 5)
- Puterea a III-a a numărului 7 este egală cu... (5p) (nota 5)
- Diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr natural par de trei cifre este egală cu... (5p) (nota 5)
- Cel mai mare număr natural de patru cifre divizibil cu 5 este... (5p) (nota 5)
- Numerele naturale în baza zece de forma $19x$: a) divizibile cu 2 sunt... (5p) (nota 5)
b) divizibile cu 10 sunt... (5p) (nota 5)
- Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma $x2yy$ cu $x \neq y \neq 2 \neq x$. (10p) (nota 5)
- Calculați:
a) $2^6 : 2^5 - 2005^0 + 2496 : 52$; (5p) (nota 7) c) $(5^2 + 12^2) : 13^2$; (5p) (nota 7)
b) $(1^1 + 2^2 + 3^3) : 2^5$; (5p) (nota 7) d) $6^3 - 3 \cdot 5^2$. (5p) (nota 7)
- Comparați:
a) 1^7 și 132^0 ; (5p) (nota 9) c) 9^{100} și 27^{60} ; (10p) (nota 9)
b) 4^{35} și 4^{53} ; (5p) (nota 9) d) 3^{303} și 4^{202} . (10p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 13 (Varianta 2)

- Determinați cel mai mare număr natural de patru cifre distincte divizibile cu:
a) 2; b) 5; c) 10. (15p) (nota 5)
- Calculați $2001 \cdot 2000 - 1999 \cdot 2000 - 2 \cdot 1999$. (5p) (nota 5)
- La o împărțire, câtul este 130, împărțitorul 32, iar restul 31. Să se calculeze, suma dintre deîmpărțit, împărțitor, cât și rest. (10p) (nota 5)
- Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile: a) $5x + 11 = 371$; (5p) (nota 7)
b) $(24 + x) : 25 = 15$; (5p) (nota 7) c) $3^2 \cdot [3^2 \cdot (x : 3^2 - 222) + 1^0] + 1^{1999} = 10$. (5p) (nota 7)
- Rezolvați, în $\mathbb{N}^*$ inecuațiile: a) $5x \leq 20$; (10p) (nota 5) b) $x + 1 < 7$. (5p) (nota 7)
- Să se determine cifra a în baza 10 pentru care numărul $1a + 2a + 3a$ este pătratul unui număr natural. (10p) (nota 9)
- Comparați numerele naturale:
 $x = 2^{1998} + 2^{1999} + 2^{2000}$ și $y = 2^{2003} - 2^{2002} + 2^{2001} - 2^{2000}$. (10p) (nota 9)
- Mihai, Andrei și Ioana au împreună 360 de timbre. Dacă Mihai i-ar da lui Andrei 15 timbre și Ioanei 35 de timbre, atunci Mihai ar avea de trei ori mai puține timbre decât Ioana și de două ori mai puține decât Andrei. Câte timbre are fiecare? (10p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 14* (Varianta 3)

Încercuțiți răspunsul corect:

- Un lift pleacă de la etajul 10, coboară la etajul 3, apoi urcă 9 etaje și coboară 4 etaje. La ce etaj este acum? A) 9; B) 7; C) 6; D) 8. (10p) (nota 5)
- Câte numere au trei cifre? A) 1 000; B) 900; C) 899; D) 901. (10p) (nota 5)
- Un comerciant are 10 000 lei și cumpără biciclete cu prețul de 650 lei. Care este numărul maxim de biciclete pe care le poate cumpăra? A) 20; B) 16; C) 14; D) 15. (10p) (nota 5)
- Câte traversări trebuie să facă o barcă cu 3 locuri ca să transporte pe celălalt mal al unui râu 10 persoane? A) 9; B) 8; C) 6; D) 10. (5p) (nota 7)
- Câtul împărțirii numărului $a = 7 + 14 + 21 + \dots + 98$ la $b = 1 + 2 + 3 + \dots + 14$ este: A) 14; B) 7; C) 50; D) 98. (5p) (nota 7)
- Ecuția $4(x + 1) = 2x + 10$ are soluția: A) 2; B) 1; C) 0; D) 3. (5p) (nota 5)
- Cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la un număr natural de o cifră dă restul 8 este: A) 109; B) 100; C) 107; D) 108. (5p) (nota 5)
- Cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la numerele 8, 12 și 18 dă de fiecare dată restul 7 este: A) 79; B) 72; C) 151; D) 7. (10p) (nota 7)
- La un turneu de șah de tip eliminatoriu s-au înscris 256 de concurenți. Numărul partidelor jucate în total este: A) 256; B) 128; C) 255; D) 512. (10p) (nota 9)
- Un elev primește 8 euro pentru o problemă bine rezolvată, dar plătește 5 euro pentru fiecare problemă nerezolvată. După 26 de probleme, elevul nu plătește nimic, dar nici nu primește. Numărul problemelor rezolvate este: A) 20; B) 10; C) 5; D) 13. (5p) (nota 9)
- Un tren pleacă duminică la ora 22 din București și ajunge la Moscova după 80h. În ce zi și la ce oră ajunge trenul la destinație? A) joi 6h; B) miercuri 20h; C) joi 8h; D) vineri 2h. (5p) (nota 9)
- Numerele naturale nenule, care împărțite la 5, dau câtul egal cu restul sunt: A) 0,5,10,15; B) 0,3,6,12,18; C) 6,12,18,24; D) 6,10,15,30. (10p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

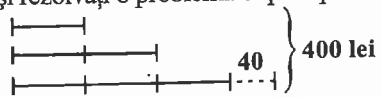
* La fiecare problemă din test, unul și numai unul dintre răspunsurile A, B, C, D este corect.

Test 15 (Varianta 4)

- Calculați: a) $15340 : 20 + 32 \cdot 15 - 389$; b) $\{1 + 2 \cdot [1 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 5)] - 50\}$. (10p) (nota 5)
- Determinați numerele naturale în baza zece de forma $\overline{1x34x}$ divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10. (10p) (nota 5)
- 7 penare costă 14 lei. Cât costă 9 penare? (5p) (nota 5)
- Aflați numerele naturale x și a știind că: a) $x + 4 = 144$; b) $x^2 + 16 = 25$; c) $a + \overline{aa} + \overline{aaa} = 369$. (5p) (nota 7)
- Calculați: a) $9^0 + 1^8 + 8^1 - 0^{2004}$; b) $7 \cdot 2^{1997} - 6 \cdot 2^{1996} - 2 \cdot 2^{1998}$. (5p) (nota 9)
- Comparați: a) 2003^0 cu 0^{2003} ; b) 5^{300} cu $(5^2)^{150}$; c) $(3^2)^{10}$ cu $(2^3)^{10}$. (5p) (nota 10)
- Suma a cinci numere naturale impare consecutive este egală cu 105. Aflați numerele. (5p) (nota 9)
- Aflați numerele naturale care împărțite la 36 dau restul mai mare decât 34 și câtul de șapte ori mai mic decât restul. (5p) (nota 9)
- Arătați că numărul: $a = 2^5 - 2^3 - 2^3$ este puterea a treia a unui număr natural. (5p) (nota 7)
- $b = 2004 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2003)$ este pătratul unui număr natural. (5p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 16 (Varianta 5)

- Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{14a}$ divizibile cu: a) 2; b) 5; c) 10. (15p) (nota 5)
- Determinați cifra x din: a) $\overline{21x} + 75 = 294$; b) $\overline{48x} \cdot 5 \leq 2425$; c) $\overline{32x} + \overline{x1} = 376$. (5p) (nota 5)
- Aflați diferența dintre 5^3 și 5^2 . (10p) (nota 5)
- Aflați numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul egal cu restul. (5p) (nota 7)
- Compuneți și rezolvați o problemă după reprezentarea grafică:

- Calculați: a) $[5 \cdot (2^2 - 3) \cdot 7 + 7^0] : 6^2$; b) $\{[(6^2 + 8^2)^2 : 50^2]^3 - 3^3 - 4^2\} : 7$. (5p) (nota 9)
- Comparați: $2^{2004} + 2^{2004}$ cu 2^{2005} . (5p) (nota 9)
- Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile: a) $(8x^2 - 400) : 20 = 20$; b) $9x + 5 = 2x + 2(3x + 3)$. (10p) (nota 9)
- Un număr natural este cu 18 mai mare decât altul. Dacă împărțim suma celor două numere la diferența lor obținem câtul 5 și restul 14. Aflați cele două numere. (10p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

1. Calculați:

- a) $14 : 2 + 20 : 4$; c) $2 \cdot [54 : (8 : 2 + 3 + 2) + (42 : 6 - 5)] + 35$;
b) $5 \cdot (48 : 8 - 3 \cdot 2)$; d) $2^0 + 3^2 + 4^3 + 5^4 - 6^3$. (4.5 p = 20p) (nota 5)

2. Rezolvați ecuațiile:

- a) $x - 135 = 782$; c) $x + 2x + 4x + 5x = 36$;
b) $22 \cdot 4 + x = 100$; d) $9x - 3 = 3x + 15$. (4.5 p = 20p) (nota 5)

3. Un camion cântărește 6370 kg dacă este încărcat. Dacă este pe jumătate gol, camionul cântărește 4220 kg. Cât cântărește camionul când este gol? (10p) (nota 7)

4. Aflați divizorii comuni ai numerelor naturale 36 și 48. (10p) (nota 7)

5. Într-un bloc sunt 42 de apartamente cu două camere și cu 4 camere. Știind că blocul are 130 de camere, aflați câte apartamente au două camere și câte au 4 camere. (10p) (nota 9)

6. Suma unor numere naturale consecutive este 66. Aflați numerele. (10p) (nota 9)

7. Aflați numărul natural x știind că numărul $x^2 - 3$ este cel puțin egal cu 50 și cel mult egal cu 100. (10p) (nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Capitolul II

MULȚIMI

II.1. Propoziții adevărate și propoziții false.

„Cel mult“, „cel puțin“, „sau“, „și“, „nu“, „dacă - atunci“

Ce este propoziția în matematică?

Șase elevi din clasă fac următoarele afirmații referitoare la numărul 64.

Victor: „Numărul 64 este pătrat perfect.“

Elena: „Numărul 64 este par.“

Oana: „Numărul 64 se divide cu 16.“

Gigel: „Numărul 64 este cubul unui număr natural.“

Ionuț: „Numărul 64 este divizibil cu 5.“

Ana: „Numărul 64 are trei cifre.“



Să observăm:

Afirmațiile elevilor: Victor, Elena, Oana și Gigel sunt adevărate, iar cele ale elevilor Ionuț și Ana sunt false.



Să exersăm:

Scrieți 4 propoziții adevărate și 3 propoziții false.



Observație: Ada afirmă: „Afară plouă.“ Această propoziție, deși este utilizată în limbajul cotidian, conține anumite neclarități: de pildă, nu știm dacă ne aflăm la polul nord sau la ecuator sau la ce anotimp se referă (toamna, iarna, primăvara, vara) etc.



Să reținem!

Numim propoziție logică, un enunț care este adevărat sau fals.
Propozițiile exclamative și cele interogative nu sunt propoziții logice (nu putem afirma cu certitudine dacă sunt adevărate sau false).

Exemple:

Propozițiile: „ $3 + 9 = 12$ “; „ $3 + 7 < 12$ “; „ $2^5 < 40$ “ sunt propoziții logice.

Propozițiile p_1 : „În ce an a murit Ștefan cel Mare?“; p_2 : „Afară ninge.“; p_3 : „Merg la teatru.“ nu sunt propoziții logice pentru că nu putem afirma despre ele că sunt propoziții adevărate sau false.

Ce semnificație au cuvintele: „cel mult“, „cel puțin“

Să observăm:

Care dintre propozițiile următoare sunt adevărate?

1. Victor: „Ecuația $3 + x = 9$ are cel mult o soluție număr natural.“

2. Nicu: „Inecuația $2^x < 16$ are cel puțin două soluții numere naturale.“

3. Alex: „Inecuația $x + 5 < 14$ are cel puțin 4 soluții, numere naturale.“

4. Ada: „Există cel puțin 6 cifre pare în sistemul zecimal de numerație.“

5. Ana: „Există cel mult 4 cifre impare în sistemul zecimal.“

Propozițiile 1, 2, 3 sunt propoziții adevărate, iar propozițiile 4 și 5 sunt false.



Să rezolvăm:

Aflați în fiecare caz numerele naturale:

- divizibile cu 5 care sunt cel puțin egale cu 19 și mai mici decât 40;
- divizibile cu 2 și cel mult egale cu 10;
- cel mult egale cu 7;
- cel puțin egale cu 2^3 și mai mici decât 15.



Rețineți!

„Cel mult 4” înseamnă 0, 1, 2, 3 sau 4.
„Cel puțin 3” înseamnă 3, 4, 5 sau mai mare.

Ce semnificație are cuvântul „sau” între propoziții?

Să observăm propozițiile:

- Victor – „Numărul 25 se divide cu 5 sau cu 3.”
- Ela – „Numărul 18 se divide cu 3 sau cu 12.”
- Irina – „Numărul 20 se divide cu 2 sau cu 5.”
- Matei – „Numărul 40 se divide cu 7 sau cu 3.”

Propozițiile p_1 , p_2 , p_3 sunt adevărate, iar propoziția p_4 este falsă.



Rețineți!

Două propoziții legate prin „sau” (disjuncția) formează o propoziție dacă cel puțin una dintre acestea este adevărată.

Ce semnificație are cuvântul „și” între propoziții?

Să observăm propozițiile:

- Art – „Numărul 14 este mai mic decât 20 și se divide cu 7.”
- Vas – „Numărul 20 este divizibil cu 10 și este mai mic decât 15.”
- Cris – „Numerele 3 și 4 sunt soluții ale inecuației $x + 5 < 15$.”
- Mat – „Numerele 2 și 4 sunt soluții ale ecuației $x' = 16$.”
- Nic – „Numerele 5 și 6 sunt soluții ale inecuației $x + 5 > 20$.”

⇒ Propozițiile p_1 , p_3 și p_4 sunt propoziții adevărate, iar propozițiile p_2 și p_5 sunt propoziții false.
⇒ Propozițiile p_1 , p_3 și p_4 leagă prin cuvântul „și” două propoziții adevărate, propoziția p_2 leagă cu același cuvânt o propoziție falsă de una adevărată, iar propoziția p_5 leagă prin cuvântul „și” două propoziții false.



Rețineți!

Două propoziții legate prin și (conjuncția) formează o propoziție adevărată dacă ambele propoziții sunt adevărate.

Ce semnificație are cuvântul „nu”?

Să observăm propozițiile:

- „Numărul 6 se divide cu 2.”
- „Numărul 6 **nu** se divide cu 2.”
- „Numărul 8 este soluție a ecuației $x^2 = 64$.”
- „Numărul 8 **nu** este soluție a ecuației $x^2 = 64$.”
- „Vaca este mamifer.”
- „Vaca **nu** este mamifer.”
- „Numărul 5 este mai mic decât 10.”
- „Numărul 5 **nu** este mai mic decât 10.”

⇒ Fiecare propoziție din coloana a II-a reprezintă negația propoziției corespunzătoare din coloana I.



Rețineți!

Negația unei propoziții se obține punând cuvântul **nu** în fața verbului.
Negația unei propoziții p este propoziția care este falsă când p este adevărată și este adevărată când p este falsă.
Negația propoziției o notăm cu **non p**.



Ce semnificație au cuvintele „dacă...”, „atunci...”?

Să analizăm propozițiile:

- „Dacă $x = 3$ și $y = 5$ atunci $x \cdot y = 10$.”
- „Dacă $x = 3$, atunci $3x < 15$.”
- „Dacă $x = 5$, atunci $3 \cdot x \leq 10$.”
- Nic – „Dacă la istorie ai notele 8 și 9, atunci vei obține media 10.”

Ce observăm?

⇒ Propoziția „dacă p , atunci q ” sau „ p implică q ” (implicația) este falsă numai dacă propoziția p este adevărată și propoziția q este falsă.

În concluzie:

Dacă notăm valoarea de adevăr a unei propoziții adevărate cu „A”, iar valoarea de adevăr a unei propoziții false cu „F”, atunci putem completa tabelul:

p	q	p și q	p sau q	non p	non q	Dacă p , atunci q
A	A	A	A	F	F	A
F	F	F	F	A	A	A
A	F	F	A	F	A	F
F	A	F	A	A	F	A

EXERCII ȘI PROBLEME

1. Care din următoarele enunțuri este propoziție?

p_1 : „ $\frac{1}{2}$ este număr natural.”;

p_2 : „Există numere naturale x și y , astfel încât $4x = 5y$.”;

p_3 : „Există numărul natural x , astfel încât $2x + 6 = 17$.”;

p_4 : „Există viață și în alte galaxii.”;

p_5 : „Există un număr natural x pentru care 4 divide $2x + 9$.”;

p_6 : „Ai fost la ora de matematică?”;

p_7 : „Ultima cifră a numărului 11^{2004} este 5.”;

p_8 : „Mergem la operă?”

(nota 5)

2. Stabiliți care din următoarele enunțuri sunt propoziții:

p_1 : „Numărul 15 este număr natural.”; p_2 : „ $1000000 = 10^6$.”;

p_3 : „Când pleci?”; p_4 : „ $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$ este număr natural par.”;

p_5 : „Mulțumesc!”; p_6 : „Dacă nu plouă, mergem în parc.”;

p_7 : „Ultima cifră a numărului $a = 1991 \cdot 1992 \cdot 1993 \cdot 1994 \cdot 1995$ este 5.”

(nota 5)

3. Stabiliți care din următoarele enunțuri sunt propoziții și precizați valoarea lor de adevăr:

p_1 : „La ce oră mergeți la teatru?”; p_2 : „Numărul x se împarte exact la 5.”;

p_3 : „Există numere naturale consecutive.”;

p_4 : „Mulțimea numerelor naturale pătrate perfecte este finită.”;

p_5 : „Orice triunghi are patru laturi.”; p_6 : „ $800 : 20 = 40$.”; p_7 : „ $400 : 20 = 30$.”;

p_8 : „Deschideți cartea la pagina 100!”; p_9 : „Desenați un cerc!”; p_{10} : „ $x \cdot 9 = 27$.”;

p_{11} : „Puterile lui 4 sunt toate numere naturale pare.”;

p_{12} : „Anul 2000 se află în secolul al XX-lea.”

(nota 5)

4. Stabiliți valoarea logică a propozițiilor:

p_1 : $17 < 17$ sau $17 = 17$;

p_2 : $24 > 24$ și $24 = 24$;

p_3 : $351 > 100$ sau $105 > 70$;

p_4 : $450 > 201$ sau $201 < 10$;

p_5 : $115 < 340$ și $340 > 500$;

p_6 : $1001 \geq 1001$.

(nota 7)

5. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:
 a) $3 \cdot 15 + 2 = \dots$; c) $25 - 12 : 4 = \dots$; e) $57 : \dots = 19$;
 b) $36 : 4 - 2 = \dots$; d) $52 + \dots \cdot 2 = 102$; f) $42 - \dots : 2 = 34$. (nota 5)
6. Înlocuiți cifra corespunzătoare a pentru a obține propoziții adevărate:
 a) $\overline{23a45} = 23445$; c) $47853 < \overline{4a853}$; e) $\overline{4932} > \overline{a932}$;
 b) $\overline{a3a42} = 53542$; d) $89342 \geq \overline{a9342}$; f) $\overline{2a3a4} = 28384$. (nota 5)
7. Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:
 p_1 : „Restul împărțirii lui 13 la 9 este egal cu 4.”
 p_2 : „Numărul 2007 se divide cu 5.”
 p_3 : „Numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot 2006 \cdot 2007$ are antipenultima cifră 0.”
 p_4 : „ $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 > 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$.”
 p_5 : „ $2007 + 2006 \cdot 2007$ este pătrat perfect.”
 p_6 : „ $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 2^5 - 1$.”
 p_7 : „Ultima cifră a numărului $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2007$ este 3.”
 p_8 : „Există trei numere naturale nenule astfel încât $a \cdot b \cdot c = a + b + c$.”
 p_9 : „Suma oricăror două numere naturale este pară.”
 p_{10} : „Toate puterile lui 2 dau restul 0 la împărțirea cu 2.”
 p_{11} : „Există un număr natural x astfel încât $2x - 2 = 8$.”
 p_{12} : „Există un număr natural x astfel încât $2x - 3 = 10$.”
 p_{13} : „Ultima cifră a numărului 3^{2007} este 7.”
 p_{14} : „Există un număr natural a astfel încât numărul $a^2 - a$ este natural impar.”
 p_{15} : Există numere naturale cuburi perfecte de două cifre.” (nota 7)
8. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor care afirmă: pentru orice număr natural x , avem:
 a) $x : x = 1$; c) $8x - 3x = 5x$; e) $x \cdot x^2 = x^3$; g) $x : 1 = x$; i) $x^3 : x^2 = x$.
 b) $x + 5x = 6x$; d) $x \cdot x = x^2$; f) $0 : x = 0$; h) $x^2 : x = x$; (nota 7)
9. Stabiliți valoarea logică a propozițiilor:
 p_1 : $3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 = 3^4$.
 p_2 : Împărțind numărul 27 072 la 9 024 se obține restul 2.
 p_3 : Restul împărțirii unui pătrat perfect la 10 este pătrat perfect.
 p_4 : $5^{69} > 7^{46}$; p_5 : $2^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 3 + 2 \cdot 5^2 = 11^2$. (nota 7)
10. Precizați, care din următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:
 p_1 : „Dacă $5 \leq 20$, atunci $5x \leq 20x$, oricare ar fi x număr natural.”
 p_2 : „Dacă pătratul unui număr natural este 121, atunci numărul este 11.”
 p_3 : „ $a^0 = 1$, oricare ar fi a număr natural nenul.”
 p_4 : „ $3^{12} \geq 9^6$.”
 p_5 : „ $7 \cdot 20 + 7 \cdot 15 - 7 \cdot 10 = 7 \cdot (20 + 15 - 10)$.”
 p_6 : „ $1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = 2^{11}$.”
 p_7 : „Restul împărțirii unui număr natural la 8 este mai mic decât 7.” (nota 7)
11. Negăți următoarele propoziții:
 p_1 : „Orice număr natural mai mare decât 100 se divide cu 5.” p_2 : „ $5 < 9$.”
 p_3 : „ $17 - 3 \geq 40$.” p_4 : „ $2^{33} > 3^{22}$.” p_5 : „Există numere întregi negative mai mari decât 10.”
 p_6 : „ $8 \cdot 10 > 8 + 10$.” p_7 : „21 este număr par.”
 p_8 : „ 25^{2004} are ultima cifră 5.” p_9 : „2004 este divizibil cu 5.” (nota 7)

12. Scrieți negațiile propozițiilor: p_1 : $x < y$; p_2 : $x < y$ sau $x = y$; p_3 : $x > y$; p_4 : $x \geq y$. (nota 7)
13. a) Scrieți negația propozițiilor: p_1 : Numerele 64, 65, 66 sunt consecutive; p_2 : 75 este succesorul lui 76; p_3 : $x \neq x \cdot 2$, oricare ar fi x număr natural; p_4 : Există cel puțin un număr natural x cu proprietatea $x^2 = x + 6$; b) Stabiliți valoarea logică a negațiilor propozițiilor p_1, p_2, p_3, p_4 . (nota 9)
14. Scrieți negațiile propozițiilor următoare și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor obținute:
 p_1 : „Numărul 474 se divide cu 6.”
 p_2 : „Nici un număr natural care are ultima cifră 3 nu este pătrat perfect.”
 p_3 : „Orice număr natural este impar.” p_4 : „Numărul 2007 este par.”
 p_5 : „ $2 \cdot 15 = 30$ ” p_6 : „ $2^7 < 5^3$ ” p_7 : „4 m = 40 cm” p_8 : „ $1^{2007} = 1$ ”
 p_9 : „Numerele naturale de forma $abcabc$ se divid cu 1001.”
 p_{10} : „Ultima cifră a numărului 2007^{2005} nu este 7.” p_{11} : „ $7 \cdot 2 - 3^2 < 1$ ” (nota 7)
15. Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor:
 p_1 : „144 este pătrat perfect sau 144 se divide cu 36.”
 p_2 : „144 este pătrat perfect și 144 este număr par.”
 p_3 : „144 este divizibil cu 10 și 144 este număr impar.”
 p_4 : „144 este divizibil cu 9 și 144 este divizibil cu 5.”
 p_5 : „144 este divizibil cu 4 și 144 este divizibil cu 7.”
 p_6 : „Dacă x și y sunt numere naturale pare, atunci $x + y$ este număr impar.”
 p_7 : „Dacă x și y au aceeași paritate, atunci $x + y$ este număr par.”
 p_8 : „Există un număr natural astfel încât $4n+1$ este cub perfect.”
 p_9 : „Dacă ultima cifră a unui număr natural este 4, atunci numărul respectiv se divide cu 4.”
 p_{10} : „Dacă ultima cifră a unui număr natural este 9, atunci numărul se divide cu 3.”
 p_{11} : „Oricare ar fi numărul natural n , atunci numărul $n^2 + n^4$ se divide cu 2.” (nota 9)
16. Se dau propozițiile:
 p : „Numerele naturale care au ultima cifră pară sunt divizibile cu 2.”;
 q : „Numerele naturale care au ultima cifră 5 sunt divizibile cu 5.”
 Alcătuiți propozițiile: a) „ p sau q ”; b) „ p și q ”; c) „dacă p , atunci q ”; d) „dacă q , atunci p ”; e) „non p ”; f) „non q ” și să se precizeze valoarea de adevăr a acestora. (nota 7)
17. Pentru cumpărarea unui obiect, patru elevi au contribuit cu sume de bani diferite. Aflați suma cu care a contribuit fiecare dacă toate propozițiile ce urmează sunt adevărate: p_1 : Primul a dat 3000 lei sau 4000 lei sau 5000 lei. p_2 : Al doilea a dat 6000 lei sau 4000 lei. p_3 : Al treilea nu a dat 3000 lei. p_4 : Al patrulea a dat 6000 lei. (nota 10)
18. Strungaru, Croitoru și Lăcătușu sunt numele de familie a trei muncitori, dar Strungaru nu este de profesie strungar, Croitoru nu este croitor, Lăcătușu nu este lăcătuș.
 a) Putem preciza care muncitor este de profesie croitor, care este strungar și care este lăcătuș? Putem preciza cu certitudine?
 b) Adăugați o condiție suplimentară încât răspunsul să fie cert. (nota 10)
19. Cinci atleți au participat la un cros. Gabriel a terminat cursa al treilea, iar Ionuț a ocupat un loc mai bun decât Gabriel, Victor a afirmat, cu regret, că n-a ocupat locul I, Vasiliță a observat că Ionuț n-a ocupat locul II, iar Gigel n-a ieșit nici primul, nici ultimul. Vasiliță a spus că el a terminat pe locul imediat următor locului ocupat de Victor. Ce loc a ocupat fiecare, știind că nu s-au clasat doi atleți pe același loc? (nota 10)

II. 2. Mulțimi; descriere și notații; element, relația dintre element și mulțime (relația de apartenență). Exemple de mulțimi finite; exemple de mulțimi infinite. Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$

Să împărțim cartonașele

- ❖ Luăm un plic P în care punem 20 de cartonașe pe care sunt scrise numerele naturale de la 1 la 20.
- ❖ Apoi mai luăm 3 plicuri P_1, P_2, P_3 .
- ❖ În plicul P_1 punem cartonașele din P care au pe ele scrise numerele pare.
- ❖ În plicul P_2 punem cartonașele din P care au pe ele scrise numerele impare multipli de 3.
- ❖ În plicul P_3 punem cartonașele care au pe ele scrise numere de două cifre ce au exact doi divizori.
- ❖ După aceste operații enumerăm în paranteze acolade, numerele de pe cartonașele din P_1, P_2 și P_3 .
Avem: $P_1 = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$.
 $P_2 = \{3; 9; 15\}$.
 $P_3 = \{11; 13; 17; 19\}$.

Au mai rămas cartonașe în plicul P ?

Ce numere conțin pe ele?

Mai luați un plic P_4 și așezați în el cartonașele rămase.

Obținem: $P_4 = \{1; 5; 7\}$.

Spunem că mulțimea cartonașelor din plicul P am împărțit-o în patru mulțimi.

Prin **mulțime** înțelegem o colecție (grămadă, ansamblu de obiecte distincte).

Exemple:

- Mulțimea cifrelor arabe din sistemul zecimal de numerație: $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$.
- Mulțimea elevilor din clasa noastră.
- Mulțimea numerelor naturale de două cifre.
- Mulțimea literelor cuvântului „apartament”.
- Mulțimea cifrelor numărului 12378.
- Mulțimea continentelor.



Rețineți:

• Mulțimile conțin elemente.
• Elementele pot fi numere, litere, obiecte, fenomene, animale, persoane etc.
• Nu este importantă numărul elementelor într-o mulțime.
• Un element apare într-o mulțime o singură dată.

Cum notăm mulțimile și elementele lor?

	Exemple:
Mulțimile se notează cu litere mari de tipar din alfabetul latin: $A; B; C; \dots; M; N; P; \dots; X; Y; Z$.	Dacă notăm cu A mulțimea literelor cuvântului „apartament” spunem că a este un element al mulțimii A , iar o nu este un element al mulțimii A .
Dacă un obiect face parte dintr-o mulțime, spunem că acesta apartine acelei mulțimi.	Scriem: $a \in A$ $o \notin A$
	Spunem: a aparține mulțimii A o nu aparține mulțimii A .

Cum reprezentăm mulțimile?

O mulțime poate fi descrisă în următoarele moduri:

1. Prin enumerarea elementelor într-o paranteză acoladă, separându-le prin „,”.

Pentru situația descrisă cu plicurile avem mulțimile:

$P = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$.

$P_1 = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$.

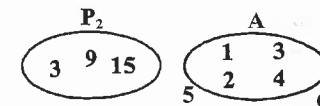
$P_2 = \{3; 9; 15\}$.

$P_3 = \{11; 13; 17; 19\}$.

2. Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

Desenele alăturate sunt diagrame.

Prima diagramă indică faptul că mulțimea P_2 este formată din elementele: 3; 9 și 15, iar cealaltă diagramă indică faptul că mulțimea A este formată din elementele 1; 2; 3; 4 și numerele 5 și 6 nu aparțin mulțimii A .



3. Al treilea mod constă în precizarea unei proprietăți caracteristice elementelor mulțimii.

Exemplu: Mulțimea B a multiplilor nenuli ai lui 5 mai mici decât 40.

Notăm:	Citim:
$A = \{x / x \text{ multiplu de } 5 \text{ și } x < 40\}$.	Mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este multiplu de 5 și x este mai mic decât 40.

Să revenim la problema celor 4 plicuri.

$P = \{x / x \text{ este număr natural nenul și } x \leq 20\}$.

$P_1 = \{x / x \text{ este element din } P, \text{ număr par}\}$.

$P_2 = \{x / x \text{ este element din } P, \text{ număr impar, multiplu de } 3\}$.

$P_3 = \{x / x \text{ este element din } P, x \text{ are două cifre și exact 2 divizori}\}$.

Observații:

- Mulțimile pot fi mai mult sau mai puțin numeroase.
- Există mulțimi care nu conțin nici un element. O astfel de mulțime se numește mulțime vidă și se notează cu simbolul Φ .
- Numărul elementelor unei mulțimi (M) se numește **cardinalul** acelei mulțimi (**card M**). Astfel, în cazul celor 4 plicuri avem: $\text{card } P = 20$; $\text{card } P_1 = 10$; $\text{card } P_2 = 3$ și $\text{card } P_3 = 4$. $\text{Card } \Phi = 0$.

Când două mulțimi sunt egale?

• Fie mulțimea $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ și $B = \{x / x \text{ este cifră pară}\}$.

Mulțimile A și B au aceleași elemente. Spunem că mulțimile A și B sunt **mulțimi egale** și notăm $A = B$.

Rețineți! Două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente.



Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$

Observație: Așa cum pentru mulțimea vidă am utilizat un simbol rezervat (Φ), pentru mulțimea numerelor naturale folosim simbolul $\mathbb{N}$, iar pentru mulțimea numerelor naturale nenule simbolul $\mathbb{N}^*$.

Avem: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ și $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$.

• Mulțimea numerelor naturale este infinită, adică are o infinitate de elemente. Elementele mulțimilor $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ le putem scrie, fără a le repeta, într-un șir nemărginit (infinit).

• Mulțimea numerelor naturale pare este infinită: $\{0; 2; 4; 6; \dots\}$.

• Mulțimea numerelor naturale impare este infinită: $\{1; 3; 5; 7; \dots\}$.

• Mulțimea multiplilor lui 3 este infinită: $\{0; 3; 6; 9; 12; \dots\}$.

• O mulțime care nu este infinită o numim **mulțime finită**. De exemplu: mulțimea literelor din alfabetul unei țări sau mulțimea elevilor din școală sau mulțimea arborilor dintr-o pădure etc.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

1. Scrieți toate numerele naturale care: a) sunt cel mult egale cu 8;
b) sunt cel puțin egale cu 85 și sunt mai mici decât 100.

(nota 5)

2. Scrieți cinci numere naturale care: a) sunt nenule;
b) sunt cel puțin egale cu 2004; c) sunt cel mult egale cu 2004.

(nota 5)

(nota 5)

3. Scrieți, mulțimile literelor din fiecare cuvânt: „matematică”, „apartament”, „apometru”, „aerisirea”, „paralelipiped”.

(nota 5)

4. Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:

a) 423561; b) 12342; c) 1203403; d) 98762101.

(nota 5)

5. Scrieți mulțimea cifrelor în baza: a) 2; b) 4; c) 9; d) 10.

(nota 7)

6. Scrieți mulțimea tuturor resturilor împărțirii unui număr natural la 10.

(nota 7)

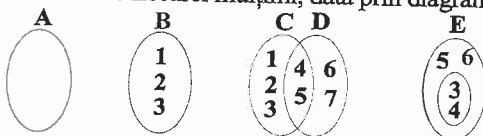
7. Se dau mulțimile: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{2; 5; 6\}$ și $C = \{4; 5; 7; 8\}$. Pentru fiecare dintre elementele: 1; 2; 7; 8; 9, scrieți cărei mulțimi aparțin și căreia nu aparțin.

(nota 5)

8. Este corect scrisă mulțimea: $A = \{1; 3; 4^0; 4; 2^2; 9; 25\}$? De ce?

(nota 7)

9. Enumerați elementele fiecărei mulțimi, dată prin diagrama Venn-Euler:



(nota 5)

10. Scrieți următoarele mulțimi enumerând elementele acestora:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 4\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 0 \leq x \leq 6\}.$$

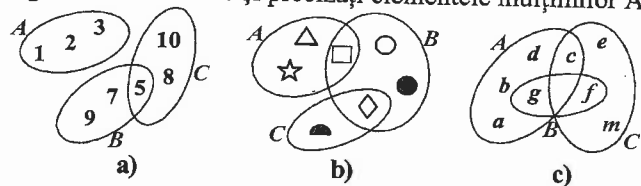
(nota 5)

11. Descrieți în două moduri diferite mulțimile următoare:

- a) mulțimea numerelor de două cifre identice;
b) mulțimea anotimpurilor;
c) mulțimea continentelor globului pământesc;
d) mulțimea cifrelor din sistemul zecimal de numerație;
e) mulțimea pătratelor perfecte de două cifre;
f) mulțimea literelor din cuvântul „auxiliar”;
g) mulțimea cifrelor numărului 123027153;
- h) mulțimea resturilor ce se pot obține la împărțirea unui număr natural la 7;
i) mulțimea colegilor de clasă născuți în luna decembrie;
j) mulțimea planetelor din sistemul solar;
k) mulțimea lunilor anului calendaristic;
l) mulțimea țărilor vecine României.

(nota 5)

12. Urmăriți diagramele următoare și precizați elementele mulțimilor A, B și C.



(nota 5)

13. Descrieți în trei moduri diferite următoarele mulțimi;

a) mulțimea numerelor naturale impare cuprinse între 19 și 34;

b) mulțimea numerelor naturale de două cifre divizibile cu 10;

c) mulțimea numerelor naturale de două cifre, cu cifra zecilor 5.

(nota 7)

14. Descrieți și în alte moduri mulțimile:

$$A = \{13; 23; 33; 43; 45; 53; 63; 73; 83; 93\};$$

$$C = \{6; 7; 8; 9\};$$

$$E = \{a; b; r\}.$$

$$B = \{11; 13; 15; 17; 19\};$$

$$D = \{c; r; a\}.$$

(nota 7)

15. Enumerați elementele mulțimii M, dacă:

$$a) A = \{x \mid x \text{ este număr natural și } x \leq 8\};$$

$$d) D = \{x \mid x \text{ număr natural și } 5 \cdot x < 17\};$$

$$b) B = \{x \mid x = \overline{a5} \text{ și } a \text{ cifră impară}\};$$

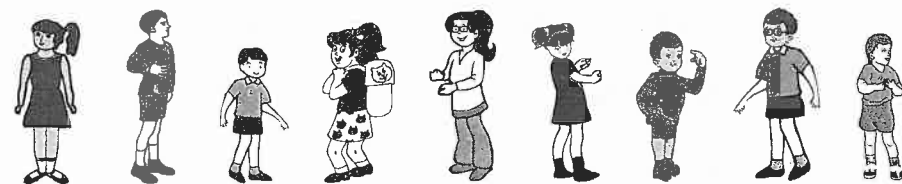
$$e) E = \{x \mid x \text{ număr natural și } 217 < x \leq 225\};$$

$$c) C = \{x \mid x \text{ este literă din cuvântul „cascadă”}\};$$

$$f) F = \{x \mid x = \overline{aa} \text{ și } a \text{ cifră pară}\}.$$

(nota 7)

- 16.



Alina
(12 ani)

Rareș
(13 ani)

Toma
(10 ani)

Mara
(11 ani)

Iulia
(12 ani)

Paula
(11 ani)

Vlad
(12 ani)

Tudor
(13 ani)

Victor
(10 ani)

- Precizați elementele mulțimilor știind că:

- o A este mulțimea fetițelor;
- o B este mulțimea copiilor care poartă ochelari;
- o C este mulțimea copiilor cu vârsta număr impar;
- o D este mulțimea copiilor cu vârsta număr par;
- o E este mulțimea fetițelor cu articol vestimentar roșu.

(nota 7)

17. Scrieți în trei moduri diferite următoarele mulțimi:

a) mulțimea numerelor pare cuprinse între 19 și 34;

b) mulțimea numerelor divizibile cu 5 cuprinse între 17 și 42;

c) mulțimea pătratelor cuprinse între 0 și 64.

(nota 7)

18. Scrieți următoarele mulțimi, folosind proprietățile caracteristice ale elementelor lor:

$$A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\};$$

$$B = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\};$$

$$C = \{3, 9, 27, 81, 243\};$$

$$D = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\};$$

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\};$$

$$F = \{5, 9, 17, 33\}.$$

(nota 7)

19. Fie mulțimea $A = \{0, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}$. Precizați care din propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

$$a) 8 \in A;$$

$$c) 8 \notin A;$$

$$e) 3 \in A;$$

$$g) 10 \in A;$$

$$i) 2 \in A.$$

$$b) 5 \notin A;$$

$$d) 9 \notin A;$$

$$f) 2^2 \in A;$$

$$h) 0 \notin A;$$

(nota 5)

20. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 5\}$ și $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $3 \in A$; b) $5 \notin A$; c) $1^3 \in A$; d) $5 \in A$; e) $9 \in B$; f) $7^1 \in B$; g) $2 \in A$ și $2 \in B$; h) $2 \in A$ sau $7 \in B$; i) $2 \in A$ și $5 \in B$; j) $3 \in A$ și $5 \notin B$; k) $1 \in A$ sau $8 \in B$; l) $5 \in A$ sau $5 \in B$.
(nota 7)

21. Să se scrie, în fiecare caz, mulțimea X , enumerând elementele sale:

- a) $X = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq 12, x \text{ par}\}$; b) $X = \{x \in \mathbb{N} / x < 14, x \text{ impar}\}$;
c) $X = \{x \in \mathbb{N}^* / 4x + 7 \leq 31\}$; d) $X = \{x \in \mathbb{N} / 5x + 10 = 30\}$;
e) $X = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ este cub perfect și are două cifre}\}$;
f) $X = \{x \in \mathbb{N} / 6 \cdot 2^x + 2^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}$.

a), b) - (nota 5); c), d) - (nota 7); e) - (nota 9); f) - (nota 10)

22. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 50\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} / 4 \leq n^2 \leq 30\}$;
 $C = \{n \in \mathbb{N} / 5^n \leq 125\}$; $D = \{n \in \mathbb{N}^* / n \text{ împărțit la 6 dă câtul egal cu restul}\}$;
 $E = \{n \in \mathbb{N} / n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}, n \leq 19\}$; $F = \{n \in \mathbb{N} / n = 3k, k \in \mathbb{N}, n \leq 21\}$.
(nota 9)

23. Aflați cardinalul mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} / 2^x \leq 24\}$; $G = \{x \in \mathbb{N} / 4^x = 1 \text{ sau } 4^x = 64\}$;
 $B = \{x \in \mathbb{N} / n \leq 1799, n \text{ par}\}$; $H = \{x \in \mathbb{N}^* / x^2 < 26 \text{ și } x^2 \geq 15\}$;
 $C = \{x \in \mathbb{N}^* / n \leq 157, 5 | n\}$; $I = \{x \in \mathbb{N} / x = 3^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$;
 $D = \{x \in \mathbb{N} / 1003 \leq n \leq 1009\}$; $J = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 2007\}$;
 $E = \{x | x \text{ literă a cuvântului „aerisirea”}\}$; $K = \{x \in \mathbb{N} / 100 \leq x < 300\}$;
 $F = \{x \in \mathbb{N} / 45 \leq x \leq 120 \text{ și } 10 | x\}$; $L = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leq x < 2007\}$.
(nota 9)

II. 3. Relația între două mulțimi (relația de incluziune); submulțime



Să recapitulăm:

15 elevi din clasa a V-a sunt componenți ai echipelor sportive din școală.
În tabelul de mai jos sunt cuprinse câteva informații despre aceștia.

Numele elevului	Vârsta	Nuanța părului	Înălțimea	Greutatea	Sportul practicat
Alina	12	blondă	1,40 m	35 kg	tenis
Andrei	11	șaten	1,37 m	32 kg	fotbal
Bogdana	12	blondă	1,35 m	30 kg	atletism
Corina	11	brunetă	1,42 m	33 kg	gimnastică
Cristian	11	brunet	1,40 m	36 kg	fotbal
Daniela	12	blondă	1,39 m	38 kg	tenis
Florin	11	brunet	1,33 m	30 kg	baschet
Ioana	12	blondă	1,35 m	33 kg	atletism
Luana	10	șatenă	1,36 m	31 kg	gimnastică
Mara	10	roșcată	1,32 m	30 kg	gimnastică
Sorina	11	brunetă	1,36 m	35 kg	tenis
Tudor	10	brunet	1,35 m	35 kg	baschet
Teodora	12	blondă	1,35 m	37 kg	gimnastică
Victor	11	blond	1,40 m	32 kg	fotbal
Vera	11	roșcată	1,36 m	30 kg	gimnastică

Să constituim următoarele mulțimi:

- A – mulțimea elevilor cu vârsta de 10 ani;
B – mulțimea băieților din clasă;
C – mulțimea fetelor blonde;
D – mulțimea fetelor cu vârsta de 12 ani;
E – mulțimea băieților care joacă fotbal;
F – mulțimea elevilor cu înălțimea de 1,40 m;
G – mulțimea fetelor roșcate din clasă;
H – mulțimea fetelor cu înălțimea de 1,35 m;
M – mulțimea elevilor din clasă cu greutatea mai mare decât 35 kg.

După ce enumerați elementele acestor mulțimi, urmăriți și comparați:

- 1) mulțimile C și D; mulțimile E și F;
- 2) mulțimile A și G, apoi C și G;
- 3) mulțimile B și E, H și D și, apoi, E și M.

Ce observăm?

- ☉ Mulțimile: C și D; E și F au aceleași elemente.
- ☉ Mulțimile A și G, C și G nu au nici un element comun.
- ☉ Elementele mulțimii E aparțin și mulțimii B, iar elementele mulțimii H aparțin și mulțimii D și elementele mulțimii E aparțin și mulțimii M.



Să reținem!

1. Două mulțimi A și B sunt egale dacă au aceleași elemente (indiferent de ordinea lor)
sau

Două mulțimi A și B sunt egale, dacă orice element al mulțimii A aparține și mulțimii B și orice element al mulțimii B aparține și mulțimii A. Se notează $A = B$.

2. Două mulțimi A și B sunt diferite dacă: $\text{card } A \neq \text{card } B$ sau $\text{card } A = \text{card } B$ dar unul sau mai multe elemente sunt diferite. Se notează $A \neq B$.

3. Dacă două mulțimi A și B sunt diferite și nici un element din A nu îl regăsim și în B, atunci mulțimile se numesc **disjuncte**.

4. O mulțime B este inclusă în mulțimea A, dacă orice element al lui B este element al mulțimii A se notează $B \subset A$ sau $A \supset B$ și în acest caz spunem că B este o **submulțime** a mulțimii A.

Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi X. Scriem $\emptyset \subset X$.

Mulțimea A este o submulțime a mulțimii A. Scriem $A \subset A$.

Exemple:

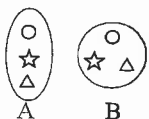
Fie mulțimile: $A = \{1; 3; 5\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ și $C = \{3; 9; 10\}$.

♦ Orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B.

Scriem $A \subset B$ și spunem că mulțimea A este **submulțime** a mulțimii B.

♦ În mulțimea C se află elementele 9 și 10 care nu aparțin mulțimii A.

♦ Scriem $C \not\subset A$ și spunem că mulțimea C **nu este submulțime** a mulțimii A (sau C nu este inclusă în A) dacă există cel puțin un element în mulțimea C care nu aparține mulțimii A.

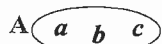


$A = B$

$A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$

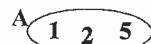
$B = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$

$A = B$



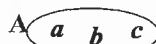
$A \neq B$

(card $A \neq \text{card } B$)



$A \neq B$

(card $A \neq \text{card } B$)



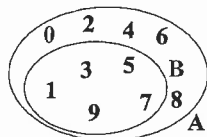
$A \neq B$

(disjuncte)

$A = \{x \mid x \text{ este cifră în baza zece}\}$.

$B = \{y \mid y \text{ este cifră impară în baza zece}\}$.

$B \subset A$.



★ Găsiți și alte exemple de mulțimi între care să existe relațiile precizate mai sus.

Rețineți!



1. Dacă $A \subset B$, oricare ar fi mulțimea A.
2. Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$.
3. Dacă $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.



EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x < 70\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x + 2 \leq 8\}$. Sunt egale mulțimile A, B, C ?

(nota 7)

2. Aflați $n \in \mathbb{N}$ știind că $\{1, 4, n, 8\} = \{1, 8, 4, 7\}$.

(nota 5)

3. Fie mulțimile: $A = \{2n + 1; 3n - 1\}$ și $B = \{4n - 5; n + 5\}$. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A = B$.

(nota 7)

4. Câte submulțimi au mulțimile $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Ce observați?

(nota 7)

5. Determinați valorile lui n , pentru care mulțimea $\{n, 2, 3\}$ este o submulțime a mulțimii: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(nota 9)

6. Scrieți submulțimile mulțimii: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ care conțin elementele 1, 2 și 3.

(nota 7)

7. Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$.

(nota 7)

8. Fie mulțimea $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Scrieți submulțimile mulțimii A care sunt și submulțimi ale mulțimii $\{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$.

(nota 9)

9. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 < x \leq 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 5\}$. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2 \in A$;

c) $A \subset B$;

e) $\emptyset \subset B$;

b) $5 \notin B$;

d) $\{2, 3, 4\} \subset B$;

f) $\{4, 3, 2\} \subset B$.

(nota 7)

10. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 6\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$. Calculați cardinalul mulțimilor A, B și C și apoi determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $4 \in A$;

b) $3 \in A$;

c) $5 \in A$;

d) $5 \in B$;

e) $6 \in C$;

f) $0 \in C$;

g) $\{0, 1\} \subset A$;

h) $\{3, 4, 5\} \subset B$;

i) $B \subset C$;

j) $B \subset A$;

k) $\{2, 3, 6\} \subset B$;

l) $\{1, 3\} \not\subset B$.

(nota 7)

11. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 4x \leq 30\}$; $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y + 2 < 9\}$ și $C = \{z \in \mathbb{N} \mid 2^z < 65\}$.

a) Scrieți elementele celor trei mulțimi.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$A \subset B$; $B \subset A$; $B = C$; $C \subset B$; $B \subset C$; $C \subset A$; $A \subset C$.

(nota 7)

12. Fie mulțimile $A = \{1; 2; 3; 5\}$; $B = \{3; 5\}$; $C = \{1; 2; 3\}$; $D = \{5\}$; $E = \{1; 2; 3\}$. Completați spațiul marcat cu unul din simbolurile: „ $\subset$ ”, „ $\supset$ ”, „ $\not\subset$ ”, „ $\not\supset$ ”.

a) $A \square C$;

b) $C \square A$;

c) $C \square E$;

d) $D \square B$;

e) $E \square A$;

f) $A \square E$;

g) $D \square E$;

h) $C \square B$.

(nota 7)

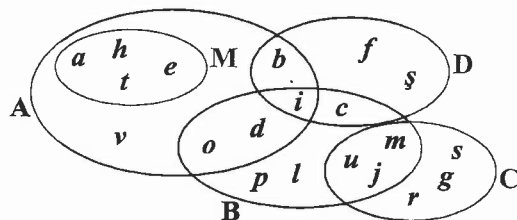
13. Se dau mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 15\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ cifră pară}\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 12 \text{ și } x \text{ număr impar}\}$;
 $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20 \text{ și } x \text{ are exact doi divizori}\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq 2x + 1 \leq 11\}$;
 $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 = y \text{ și } y \text{ este cifră impară}\}.$

a) Determinați elementele acestor mulțimi.

b) Precizați ce relație există între oricare două dintre aceste mulțimi. (nota 7)

14. În diagrama alăturată fiecare literă mică reprezintă prima literă din prenumele unui elev dintr-o clasă de a V-a. Știind că nu există doi elevi la care prenumele să înceapă cu aceeași literă și că: A este mulțimea fetelor din clasa respectivă, B este mulțimea elevilor cu păr blond, D mulțimea elevilor care poartă ochelari, C mulțimea elevilor care au împlinit deja 12 ani, iar M este mulțimea elevilor care sunt înscriși la cercul de matematică, stabiliți:



a) Câți elevi sunt în această clasă.

b) Câte fete poartă ochelari.

c) Câți elevi nu au părul blond.

d) Dacă există băieți înscriși la cercul de matematică.

e) Câți băieți sunt înscriși în această clasă.

f) Ce relație există între mulțimile M și A, respectiv, între C și D. (nota 7)

15. Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x < 20\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{ab} \text{ și } a = 1\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 \leq 2x + 1 < 41\}$. Sunt egale mulțimile A, B și C? (nota 7)

16. Aflați n astfel încât $A = B$, dacă:

a) $A = \{1; 4; n; 8\}$ și $B = \{1; 8; 4; 7\}$; d) $A = \{n + 15; 2n + 1\}$ și $B = \{15; 22\}$;
b) $A = \{2^n; 3^2; 5^2; 6^3\}$ și $B = \{9; 216; 8; 25\}$; e) $A = \{2n + 1; 3n - 1\}$ și $B = \{4n - 5; n + 5\}$.
c) $A = \{n - 2; 3n + 1\}$ și $B = \{8; 31\}$; (nota 7)

17. Determinați valorile naturale ale lui n astfel încât $A \subset B$ dacă:

a) $A = \{n; 2; 3\}$ și $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$;
b) $A = \{2; n; n^2; 40\}$ și $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 25; 40\}$;
c) $A = \{2; n^2; 7; 9\}$ și $B = \{1; 2; 4; 7; 9; 16\}$. (nota 7)

18. Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$. (nota 7)

19. Fie mulțimea $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

a) Scrieți submulțimile mulțimii A, care conțin elementele 1, 2 și 3.

b) Scrieți submulțimile mulțimii A care au cardinalul 4.

c) Scrieți submulțimile mulțimii A cu cardinalul 2, disjuncte. (nota 7)

II. 4. Operații cu mulțimi (intersecție, reuniune, diferență)

Hobby-urile
Alinei și a lui
Bogdan



Alina

- muzică
- gimnastică
- filatelie
- pictură
- ciclism

A

- muzică
- hochei
- baschet
- filatelie
- alpinism

B



Bogdan



Să observăm:

1. Dacă facem o listă în care să trecem hobby-urile pe care le au Alina sau Bogdan atunci avem:
2. Alina și Bogdan au două hobby-uri în comun: muzica și filatelie.
3. Hobby-urile pe care le are doar Alina, nu și Bogdan sunt: gimnastică, pictură și ciclism.
4. Hobby-urile pe care le are doar Bogdan, nu și Alina, sunt: hochei, baschet, alpinism.

- muzică
- gimnastică
- filatelie
- pictură
- ciclism
- hochei
- baschet
- alpinism

Ce este reuniunea a două mulțimi?

Notăm:

Citim:

1. Mulțimea tuturor hobby-urilor Alinei și ale lui Bogdan, reprezintă **reuniunea** mulțimilor A și B.

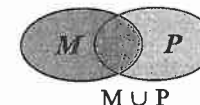
$A \cup B$

Mulțimea A reunită cu mulțimea B.



Să reținem!

Reuniunea a două mulțimi M și P este mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimi.
 $M \cup P = \{x \mid x \in M \text{ sau } x \in P\}.$



$M \cup P$

Să exersăm:

Fie mulțimile: $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{2; 3; 5; 7\}$; $C = \{3; 5; 8; 9; 10\}$.
Calculați: $A \cup B$; $B \cup C$; $A \cup C$; $A \cup B \cup C$.

Rezolvare:

$A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7\}$; $B \cup C = \{2; 3; 5; 7; 8; 9; 10\}$;

$A \cup C = \{1; 2; 3; 5; 8; 9; 10\}$; $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 5; 7; 8; 9; 10\}.$

Ce este intersecția a două mulțimi?

Notăm:

Citim:

2. Mulțimea hoby-urilor în comun ale Alinei și Bogdan, muzica și filatelie reprezintă **intersecția** mulțimilor A și B.

$A \cap B$

Mulțimea A intersectată cu mulțimea B.



Să reținem!

Intersecția a două mulțimi N și Q este mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi.
 $N \cap Q = \{y \mid y \in N \text{ și } y \in Q\}.$



$N \cap Q$

Observație:

Două mulțimi care au intersecția mulțimea vidă le numim mulțimi disjuncte.



Să exersăm:

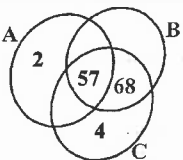
Fie mulțimile: $A = \{2; 5; 7\}$; $B = \{5; 6; 7; 8\}$; $C = \{4; 5; 6; 7; 8\}$.

Calculați: $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$; $A \cap B \cap C$.

Rezolvare:

$A \cap B = \{5\}$; $A \cap C = \{5; 7\}$; $B \cap C = \{5; 6; 7; 8\}$.

$A \cap B \cap C = \{5; 7\}$.



Ce este diferența a două mulțimi?

Notăm:

$A \setminus B$

Citim:

A minus B sau diferența dintre A și B.

3. Mulțimea hobby-urilor pe care le are doar Alina, nu și Bogdan, reprezintă diferența mulțimilor A și B.

4. Mulțimea hobby-urilor pe care le are doar Bogdan, nu și Alina reprezintă diferența mulțimilor B și A.

$B \setminus A$

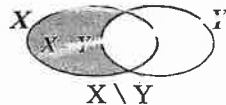
B minus A sau diferența dintre B și A.



Să reținem!

Diferența a două mulțimi, X și Y, este mulțimea colorată, formată din elementele care aparțin mulțimii X și nu aparțin mulțimii Y.

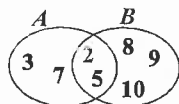
$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ și } x \notin Y\}$.



Să exersăm:

Se dau mulțimile: $A = \{2; 3; 5; 7\}$; $B = \{2; 5; 8; 9; 10\}$.
Calculați: $A \setminus B$; $B \setminus A$.

Rezolvare: $A \setminus B = \{3; 7\}$; $B \setminus A = \{8; 9; 10\}$.

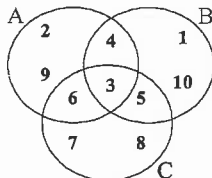


Să recapitulăm:

Operația	Notăția	Definiția	Diagrama
Reuniunea	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$	
Intersecția	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$	
Diferența	$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$	

EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Fie mulțimile A, B, C reprezentate prin diagrama Wenn-Euler din figura alăturată: Scrieți elementele mulțimilor: A, B, C, $D = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$, $E = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in C\}$, $F = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in C\}$, $G = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$, $H = \{x \mid x \in B \text{ și } x \in C\}$, $I = \{x \mid x \notin B \text{ sau } x \in C\}$, $J = \{x \mid x \notin A \text{ sau } x \in B\}$, $K = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C\}$. (nota 5)



2. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Calculați: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$. (nota 7)

3. Fie mulțimile: $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{b, c, e\}$, $P = \{c, e, f\}$. Calculați: $M \cup N$; $M \cup P$; $M \cup N \cup P$; $M \cap N$; $N \cap P$; $M \cap N \cap P$; $M \setminus N$; $P \setminus N$. (nota 7)

4. Scrieți două mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea $\{2, 3, 4, 5\}$. Aflați toate posibilitățile. (nota 9)

5. Dacă $A \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$, scrieți elementele mulțimii A. (nota 9)

6. Se dă mulțimea: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Câte submulțimi are mulțimea A cu câte: a) două elemente; b) 3 elemente; c) 4 elemente. (nota 9)

7. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 12\}$. Descompuneți mulțimea A în două submulțimi care au aceeași sumă a elementelor. Soluția este unică! (nota 9)

8. Fie A o submulțime a mulțimii numerelor naturale. Dacă A satisface, simultan, condițiile: a) $3 \in A$ și $5 \in A$; b) Dacă $x \in A$ și $y \in A$, atunci $xy \in A$;

c) Dacă $x \in A$, atunci $4x \in A$; d) Dacă $x \in A$, atunci $x^2 - 9 \in A$.

Arătați că $247 \in A$ și $300 \in A$. (nota 10)

9. Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$; $B = \{0, 1, 3, 4, 5\}$; $C = \{2, 4, 6, 8\}$; $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$. Să se afle: $A \cup B$; $B \cup C$; $C \cup D$; $B \cup C \cup D$; $B \cap C$; $A \cap E$; $D \cap E$; $A \setminus B$; $B \setminus C$; $D \setminus E$; $E \setminus C$; $B \setminus A$; $(A \cup B) \cap C$; $(B \cup C) \cap (A \cup E)$; $\emptyset \cup (A \cap B)$; $(A \cap B) \cap (\emptyset \cap C)$; $(A \cup B \cup C) \cap (C \cup D \cup E)$. (nota 7)

10. Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 4, 6\}$, $C = \{2, 3, 4, 6, 7\}$. Determinați mulțimile: $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cup C$; $B \cap C$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $C \setminus A$; $B \setminus C$; $(A \cup B) \cap C$; $(A \cup B) \cap (B \cup C)$; $A \cap (C \cap B)$. (nota 7)

11. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 7\}$, $B = \{x \in A \mid x \neq 4, x \neq 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2 < 2x - 4 \leq 8\}$. Calculați: $A \cup B$; $B \cup C$; $A \setminus B$; $B \setminus C$; $C \setminus A$; $A \cup B \cup C$; $A \cap C$; $A \cap B$; $B \cap C$; $(A \cap B) \cup C$. (nota 7)

12. Fie mulțimile $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a = 3^n, n \in \mathbb{N}^*, n < 3\}$, $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b^2 = a, a \in A\}$, $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = b^2 - 1, b \in B\}$. Calculați: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup C$; $A \cap C$; $B \cup C$; $B \cap C$; $A \setminus C$; $B \setminus A$; $C \setminus A$; $A \cap B \cap C$. (nota 9)

13. Fie mulțimea $A = \{1, x, 2, 3\}$. Determinați valoarea lui x știind că: $A \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. (nota 7)

14. Fie mulțimea $B = \{1, n, 5, 7\}$. Determinați valoarea lui n știind că: $B \cap \{3, 4, 5, 9\} = \{5, 9\}$. (nota 7)

15. Determinați elementele mulțimii X știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile: (1) $\{0, 1, 2\} \subset X$ și (2) $X \subset \{0, 1, 2, 3\}$. (nota 9)

16. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați mulțimea B știind că: $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. (nota 7)

17. Determinați mulțimea X știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile:

(1) $X \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$; (2) $X \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$; (3) $X \setminus \mathbb{N}^* \neq \emptyset$. (nota 9)

18. Fie mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Determinați mulțimea B știind că:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ și $A \cap B = \{3, 5\}$. (nota 7)

19. Fie mulțimea $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Determinați mulțimea B știind că aceasta are două elemente și $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$. (nota 9)

20. Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile:

a) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$; b) $4 \notin A$; c) $A \cap B = \{6, 8\}$. (nota 10)

21. Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite, simultan, relațiile:

a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; b) $A \cap B = \{c, d\}$; c) $A \cap \{e, f, g\} = \emptyset$; d) $\{a, b\} \cap B = \emptyset$. (nota 10)

22. Determinați mulțimile X și Y știind că: (1) $X \cap Y = \{b, e\}$;

(2) $X \cup \{a, b\} = \{a, b, c, e, f\}$; (3) $Y \cup \{b, c\} = \{a, b, c, d, e\}$. (nota 10)

23. Determinați mulțimile A și B știind că: (1) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; (2) $A \cap B = \{a, b\}$; (3) $A \cap \{c, d\} = \emptyset$; (4) $B \cap \{e, f\} = \emptyset$. (nota 10)

24. Se consideră mulțimile: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 7, a\}$ și $C = \{2, 3, b, 8, 4\}$. Determinați numerele a și b știind că sunt îndeplinite simultan condițiile: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ și $B \cap C = \{1, 2, 4\}$. (nota 10)

25. Se dau mulțimile: $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{0, 2, 4, 6\}$. Determinați mulțimile: $A \setminus B$; $A \setminus C$; $B \setminus C$; $C \setminus A$; $C \setminus B$; $B \setminus A$; $(A \setminus B) \setminus C$; $(C \setminus B) \setminus A$. (nota 10)

26. Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x < 7\}$. Determinați mulțimile: $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $A \setminus \emptyset$, $\emptyset \setminus B$, $(A \setminus B) \setminus C$. (nota 10)

27. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați submulțimile X și Y ale mulțimii A știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile: (1) $X \setminus Y = \{1, 2\}$ și (2) $Y \setminus X = \{3, 5\}$. (nota 9)

28. Determinați mulțimile A și B dacă propozițiile următoare sunt toate adevărate: (1) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; (2) $\mathbb{N}^* \supset A \setminus B$; (3) $B \setminus A = \{2, 3, 4\}$. (nota 10)

29. Să se determine mulțimile A și B știind că: $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $A \cap B = \{a, c, e, g\}$; $A \setminus B = \{b, d, f, h\}$. (nota 10)

30. Să se determine mulțimile A , B , C știind că sunt verificate, simultan, condițiile: $A \setminus B = \{a, b\}$; $A \setminus C = \{b, c\}$; $B \setminus C = \{c, d\}$; $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d\}$. (nota 10)

31. Determinați mulțimile A și B știind că: (1) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$; (2) $A \cap B = \{a, b\}$; (3) $c \notin A \setminus B$; (4) $d \notin B \setminus A$. (nota 10)

32. Să se determine mulțimile A , B și C știind că: (1) $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}$; (2) $A \cap B \cap C = \{a\}$; (3) $A \setminus B = \{b, c\}$; (4) $A \setminus C = \{b, d\}$; (5) $e \notin A \cup B$. (nota 10)

33. Să se determine mulțimile A și B știind că îndeplinesc, simultan, condițiile: (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; (2) $A \setminus (A \cap B) = \{1, 2\}$; (3) $B \setminus (A \cap B) = \{7, 8\}$. (nota 10)

34. Să se determine mulțimile A , B , C știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile: (1) $(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$; (2) $A \cap B \cap C = \{2, 3\}$; (3) $A \setminus C = \{4, 5, 6, 8\}$; (4) $B \setminus C = \{4, 6, 7, 9\}$. (nota 10)

35. Să se determine mulțimile A , B , C care satisfac, simultan, condițiile: (a) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\}$; (b) $B \cap C = \{2\}$; (c) $C \setminus B = \emptyset$; (d) $B \setminus \{3\} = B \setminus A$. (nota 10)

36. Dacă mulțimea $A \cup B$ are 120 de elemente, $A \setminus B$ are 40 de elemente și $B \setminus A$ are 30 de elemente, câte elemente are mulțimea $A \cap B$? (nota 10)

37. Într-o clasă sunt 25 de elevi care participă la concursul de matematică sau de limba română. Se știe că 20 de elevi participă la concursul de matematică și 15 elevi la concursul de limba română. a) Câți elevi participă la ambele concursuri? b) Câți elevi participă numai la concursul de matematică? Dar numai de limbă română? (nota 10)

38. Determinați mulțimea X știind că: (1) $X \setminus \{0, 1, 2, 3, 4\} = \emptyset$; (2) $X \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$; (3) $\text{card } X = 4$. (nota 10)

39. Determinați mulțimile X , Y și Z știind că: (1) $X \cup Y = Y \cup Z = Z \cup X = \{a, b, c, d, e, f\}$; (2) $X \cap Y = \{c, d, f\}$; (3) $Z \setminus X = \{a, b\}$; (4) $\text{card } X = \text{card } Z$. (nota 10)

40. Determinați mulțimile A și B știind că: (1) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; (2) $A \cap B = \{b, d\}$; (3) $B \cap \{a\} \neq \emptyset$; (4) $A \cap \{c, e\} \neq \emptyset$ și B are mai multe elemente decât A . (nota 10)

41. **Problemă aplicativă.** Elevii din clasele a IV-a și a V-a ale unei școli au organizat activități comune: vizionarea unui film, o seară de poezie și o drumeție. Au participat la fiecare activitate respectiv 85, 58 și 82 elevi. Se știe că 32 elevi au participat la toate activitățile, 45 elevi au participat la vizionarea filmului și la seara de poezie, 44 elevi au participat la vizionarea filmului și la drumeție, iar 40 de elevi la seara de poezie și la drumeție. a) Aflați numărul de participanți numai la câte o singură activitate. b) Aflați numărul de participanți numai la câte două activități. (nota 10)

II.5. Mulțimi. Exerciții recapitulative

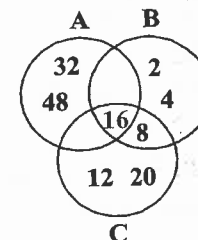
- Se consideră mulțimile: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d\}$; $C = \{c, d\}$.
a) Scrieți submulțimile mulțimii A;
b) Calculați: $A \cup B$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $C \setminus B$. (nota 7)
- Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} / 12x \leq 24\}$; $B = \{y \in \mathbb{N}^* / 5y \leq 25\}$; $C = \{z \in \mathbb{N} / z - 2 \leq 2\}$.
Aflați: a) $A \cup B \cup C$; b) $B \cap C$; c) $A \cap B \cap C$; d) $(A \cup B) \cap C$. (nota 9)
- Determinați mulțimile: $A = \{n \in \mathbb{N} / n = \overline{14x}, 2 / n\}$; $B = \{m \in \mathbb{N} / m = \overline{14xy}, 5 / m\}$; $C = \{p \in \mathbb{N} / p = \overline{171x}, 10 / p\}$; $D = \{q \in \mathbb{N} / q = \overline{x0x}, 2 / q\}$; $E = \{t \in \mathbb{N} / t = \overline{x23y}, 10 / t\}$. (nota 9)
- Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} / 6 \leq x \leq 7\}$. (nota 9)
- Se dau mulțimile: $A = \{2, 4, 5\}$; $B = \{2, 3, x, 6\}$; $C = \{x, y, 4, 8\}$.
Determinați x și y știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile:
(1) $A \cap B = \{2, 5\}$ și (2) $A \subset C$. (nota 9)
- Determinați mulțimile: a) $D_{15} \cap D_{18}$; b) $D_9 \cup D_{24}$; c) $D_8 \cup D_{10} \cup D_{12}$. (nota 7)
- Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$; $C = \{0, 1, 2, 6, 7\}$. Aflați: a) $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cap B$; $A \cap B \cap C$; b) $B \cap C$; $(A \cap B) \cup C$; $(A \cup B) \cap C$; $B \setminus A$. (nota 7)
- Fie $A = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq 6\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leq x < 8\}$. Aflați: $A \cup B$, $A \cap B$. (nota 7)
- Se dau mulțimile: $A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 + n \leq 7\}$; $B = \{p \in \mathbb{N} / x = 4p - p^2, x \in \mathbb{N}\}$.
a) Enumerați elementele mulțimilor A și B; b) Scrieți submulțimile mulțimii A;
c) Calculați $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$. (nota 9)
- Dacă $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $\{2, 4\} \subseteq A$; $2 \notin B$; $4 \notin B$, atunci $A = \{\dots\}$, $B = \{\dots\}$. (nota 9)
- Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} / 4 < x \leq 16\}$.
a) Știind că $B = \{x \in A / x : 2\}$ și $C = \{x \in A / x : 5\}$, calculați $B \cup C$; $B \cap C$; $B \setminus C$.
b) Scrieți submulțimile mulțimii C. (nota 9)
- Dacă $A = \{x \in \mathbb{N}^* / x < 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x < 7\}$ atunci $A \cup B = \{\dots\}$. (nota 7)
- Stabiliți care dintre mulțimile de mai jos sunt finite și care sunt infinite:
a) mulțimea orașelor din România;
b) mulțimea punctelor de pe o dreaptă;
c) mulțimea copiilor din Europa;
d) mulțimea copiilor de pe Terra;
e) mulțimea tuturor multiplilor lui 11 mai mici decât 10^6 ;
f) mulțimea multiplilor lui 5;

- mulțimea multiplilor lui 7 mai mari decât 10^6 ;
- mulțimea soluțiilor naturale ale inecuației $4x + 9 \geq 3x + 10$;
- mulțimea soluțiilor naturale ale inecuației $3x + 5 \leq 20$;
- mulțimea tuturor numerelor naturale care au cel mult 3 cifre în baza 10;
- mulțimea tuturor numerelor naturale care au cel puțin șase cifre în baza zece. (nota 5)

14. Se dau mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, $C = \{0, 5, 6\}$. Determinați: $A \cup B$; $B \cup C$; $A \cap C$; $B \setminus C$; $C \setminus A$; $(A \cup B) \cap C$; $(A \cap C) \cap (B \cap C)$; $(A \cap C) \cup B$; $(A \setminus C) \setminus B$; $(B \setminus C) \cup A$; $(C \setminus B) \cup A$; $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cup C$. (nota 7)

15. Mulțimile A, B, C sunt reprezentate în diagrama alăturată.

- Enumerați elementele mulțimilor A, B, C.
- Enumerați elementele mulțimilor: $A \cup B$, $A \cup C$; $B \cup C$; $B \cap C$ și $A \cap B \cap C$.



- Scrieți mulțimile A, B, C folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale. (nota 7)

16. Aflați elementele mulțimii $B \setminus A$ știind că mulțimile A și B satisfac simultan condițiile:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; b) $A \cap B = \{1, 3, 7\}$; c) $B \setminus A = \{2, 4, 5, 8\}$. (nota 7)

17. Determinați elementele mulțimilor A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$; c) $A \setminus B = \{1, 3\}$. (nota 7)

18. Stabiliți cardinalul (numărul elementelor) mulțimilor:

- $A = \{x / x = 2n + 1, n < 10 \text{ și } n \in \mathbb{N}^*\}$; $C = \{x / x \in \mathbb{N}, x \leq 100 \text{ și } 3 / x\}$;
 $B = \{x / x \in \mathbb{N}, 9 \leq x < 2013\}$; $D = \{x / x \in \mathbb{N}, x = 2^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$. (nota 7)

19. Scrieți mulțimile următoare, evidențiind câte o proprietate caracteristică ale elementelor sale.

- $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$; $C = \{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$;
 $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$; $D = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. (nota 7)

20. Aflați cardinalul mulțimii $A = \{\overline{abc} / 10 / \overline{abc}, \overline{abc} \text{ este număr în baza } 10\}$. (nota 7)

21. Aflați cardinalul mulțimii $B = \{\overline{abc} / 5 / \overline{abc}, \overline{abc} \text{ este număr în baza } 10\}$. (nota 7)

22. Aflați cardinalul mulțimii $A = \{\overline{abcd} / 2 / \overline{abcd}, \overline{abcd} \text{ este număr de patru cifre scris în baza zece}\}$. (nota 7)

23. Fie mulțimile $A = \{2^n + 1, 9, 17\}$ și $B = \{5, 9, 17\}$. Aflați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card } A \cap B = \{3\}$. (nota 7)

24. Fie mulțimile $A = \{2^n + 3, 23, 54\}$ și $B = \{23, 54, 67\}$. Aflați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A = B$. (nota 7)

25. Fie mulțimile $A = \{2^n - 7, 42, 29\}$ și $B = \{25, 2^n - 3, 42\}$. Aflați $n \in \mathbb{N}$, dacă $A = B$.
26. Fie mulțimile $A = \{3^{n+m} + 7, 57, 81\}$ și $B = \{57, 81, 88\}$. Aflați numerele naturale n și m știind că $A = B$. (nota 7)
27. O echipă internațională de cercetători este formată din 100 de membri. Toți cercetătorii vorbesc cel puțin una dintre limbile engleză și spaniolă. Se știe că 70 din cercetători vorbesc engleza și 75 vorbesc spaniola, aflați:
 a) câți cercetători vorbesc ambele limbi;
 b) câți cercetători vorbesc numai engleza;
 c) câți cercetători vorbesc numai spaniola. (nota 9)
28. În săptămâna „Școala altfel“, elevii unei clase merg la teatru sau la film. Se știe că 8 elevi merg numai la teatru, 11 elevi merg numai la film, iar 6 elevi merg și la teatru și la film. Câți elevi sunt în acea clasă? (nota 9)
29. Se știe că mulțimea $A \setminus B$ are 5 elemente, mulțimea $B \setminus A$ are 10 elemente, iar mulțimea $A \cap B$ are 4 elemente. Câte elemente are mulțimea $A \cup B$. (nota 9)
30. Într-o clasă sunt 25 de elevi. Dintre aceștia, 8 participă la olimpiada de matematică și 11 la olimpiada de română. Se știe că 10 elevi nu participă la nicio olimpiadă.
 a) Aflați numărul elevilor care participă la ambele olimpiade.
 b) Aflați câți elevi participă numai la olimpiada de matematică. (nota 9)
31. Considerăm mulțimea $A = \{3, 6, 9, 12\}$.
 a) Scrieți mulțimea A , evidențiind o proprietate caracteristică a elementelor sale.
 b) Câte submulțimi ale mulțimii A conțin pe 6? Dar pe 12? (nota 9)
32. Fie mulțimile $M = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 3\}$, $S = \{y / y = x^2 + 3, x \in M\}$ și $P = \{z \in \mathbb{N} / z = 3^x, x \in M\}$. Determinați mulțimile $M \cup S$, $M \cup P$, $S \cap P$ și $M \setminus S$. (nota 9)
33. Dați două exemple de mulțimi finite și trei exemple de mulțimi infinite. (nota 7)
34. Aflați cardinalul mulțimilor $A = \{x / x \in \mathbb{N}, x = a^b; a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$. (nota 9)
35. Considerăm mulțimile $A = \{x / x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$, $B = \{y / y \in \mathbb{N}, y < 4\}$ și $C = \{z / z = x \cdot y, x \in A \text{ și } y \in B\}$.
 a) Determinați elementele mulțimilor A , B , C .
 b) Ce relații de incluziune există între mulțimile A , B , C ?
 c) Aflați cardinalul mulțimii C . (nota 9)
36. Dintre cei 25 de elevi ai unei clase, 8 elevi fac parte din echipa de handbal a clasei, iar 12 elevi fac parte din echipa de fotbal a clasei. Se știe că 4 elevi fac parte din ambele echipe. Câți elevi din clasă nu fac parte din nicio echipă a clasei? (nota 9)
37. Să se afle numărul elementelor mulțimilor A și B știind că:
 $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x \leq 2003\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} / 2^{1999} < x \leq 2^{2003}\}$. (nota 10)

38. Se dau mulțimile: $A = \{5n + 2008; 5n + 2012; 5n + 2013; 5n + 2017 / n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{p^2 / p \in \mathbb{N}\}$. Determinați $A \cap B$. (nota 10)
39. Să se afle mulțimile A și B știind că îndeplinesc simultan condițiile:
 a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, b) $A \cap B = \{2, 6, 7\}$ și c) $A \setminus B = \{1, 4\}$. (nota 7)
40. Determinați numerele naturale x, y, z, t știind că: $\{x, y, t\} = \{1, 2, 3\}$; $\{z, t\} = \{1, 4\}$; $\{1, 2\} \cup \{y, t\} = \{1, 2, 3\}$. (nota 10)

Test 18

Completați spațiile punctate:

1. Elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x \leq 6\}$ sunt ... (5p) (nota 5)
2. Mulțimea literelor din cuvântul „aritmetică“ are un număr de ... elemente. (5p) (nota 5)
3. Dacă $A = \{0, 2, 4\}$ și $B = \{0, 1, 5\}$, atunci $A \cup B = \{\dots\}$. (5p) (nota 7)
4. Dacă $M = \{0, 1, 2, 3\}$ și $N = \{1, 3, 5\}$, atunci $M \cap N = \{\dots\}$. (5p) (nota 7)
5. Dacă $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, valoarea de adevăr a propoziției: $A \subset \mathbb{N}$ este ... (5p) (nota 5)
6. Se consideră mulțimile $A = \{1, 5, 7, 8\}$ și $B = \{1, 8, 7, x\}$. Dacă $A = B$, atunci $x = \dots$. (5p) (nota 5)
7. Numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} / 2x \leq 2004\}$ este ... (5p) (nota 7)
8. Mulțimea soluțiilor naturale ale ecuației $x + 3 = 5$ este $\{\dots\}$. (5p) (nota 5)
9. Mulțimea soluțiilor naturale ale inecuației $x + 3 < 5$ este $\{\dots\}$. (5p) (nota 5)
10. Aflați numărul elementelor mulțimii $E = \{11, 12, 13, \dots, 199\}$. (10p) (nota 5)
11. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „ $2^3 + 2^3 = 4^{24}$ “. (5p) (nota 7)
12. Fie $A = \{x \in \mathbb{N}^* / 4(x + 4) \leq 20\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} / y \leq 4\}$. Determinați mulțimile: A , B , $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. (20p) (nota 9)
13. Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile:
 a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $A \cap B = \{2, 6\}$; c) $A \cap \{1, 3, 4, 5\} = \{4\}$. (10p) (nota 10)
- Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Test 19

Completați spațiile punctate:

1. Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x < 5\}$ are ca elemente numerele: ... (10p) (nota 5)
2. Mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N}^* / x < 2^4\}$ are ... elemente. (5p) (nota 7)
3. Dacă $A = \{2, 5, 7\}$ și $B = \{1, 5, 8\}$ atunci $A \cup B = \{\dots\}$. (5p) (nota 7)
4. Mulțimea divizorilor lui 18 este $\{\dots\}$. (5p) (nota 5)
5. Dacă $A = \{7; 25\}$ și $B = \{2x + 1; 8x + 1\}$ atunci $A = B$ dacă $x = \dots$. (5p) (nota 7)
6. Mulțimea $C = \{2, 7, 9, 11\}$ are ... submulțimi. (10p) (nota 5)

7. Valoarea logică a propoziției „ $\emptyset \subset \{0, 1\}$ ” este (5p) (nota 5)
8. Valoarea logică a propoziției „ $\{1, 3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ” este (5p) (nota 5)
9. Dacă mulțimea A are 7 elemente, mulțimea B are 6 elemente și $A \cup B$ are 10 elemente, atunci $A \cap B$ are ... elemente. (5p) (nota 7)
10. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* / x < 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 5\}$.
 a) Aflați elementele mulțimilor A, B și C; b) Aflați mulțimile: $(A \cup B) \cap C$; $(A \cup B \cup C) \cap \emptyset$; $(A \cap B) \cup (B \cap C)$; $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. a) - (5p) (nota 5), b) - (10p) (nota 9)
11. Să se determine mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite, simultan, condițiile:
 a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cap B = \{2\}$; c) $\{0, 5, 7\} \subseteq B$. (10p) (nota 10)
12. Mulțimea A are 10 elemente și mulțimea B are 6 elemente, iar mulțimea $A \cap B$ are 4 elemente. Câte elemente are mulțimea $A \cup B$. (10p) (nota 9)
- Temp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Test 20 (tip grilă)

La fiecare dintre problemele din test, unul și numai unul dintre răspunsurile A, B, C, D este corect. Încercuiți răspunsul corect.

1. Numărul submulțimilor mulțimii $\{1, 2, 3\} = A$ este egal cu:
 A. 4; B. 3; C. 8; D. 9. (nota 5)
2. Se consideră mulțimile: $M = \{n \in \mathbb{N} / 2n + 5 \leq 11\}$ și $N = \{m \in \mathbb{N} / m = 2n, n \in \mathbb{N}\}$.
 a) Mulțimea $M \cup N$ este egală cu:
 A. $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$; B. $\{0, 2, 4, 6\}$; C. $\{0, 1, 2, 3\}$; D. $\{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$. (nota 5)
- b) Mulțimea $M \cap N$ este egală cu:
 A. $\{1, 2\}$; B. $\{0, 2, 3\}$; C. $\{0, 1, 2\}$; D. $\{0, 2\}$. (nota 5)
- c) Mulțimea $N \setminus M$ este egală cu:
 A. $\{0, 2\}$; B. $\{2, 4, 6\}$; C. $\{4, 6\}$; D. $\{1, 3\}$. (nota 5)
3. Notăm cu D_{12} mulțimea divizorilor lui 12 și cu D_{18} mulțimea divizorilor lui 18. Mulțimea $D_{12} \cap D_{18}$ este egală cu:
 A. $\{1, 2, 3\}$; B. $\{1, 2, 3, 6\}$; C. $\{1, 2, 12\}$; D. $\{2, 3, 6\}$. (nota 7)
4. Numărul elementelor mulțimii $\{10, 13, 16, 19, \dots, 1000\}$ este egal cu:
 A. 500; B. 330; C. 331; D. 332. (nota 7)
5. Dacă card A = 8, card B = 5 și card $A \cup B = 10$, atunci card $A \cap B$ este egal cu:
 A. 3; B. 4; C. 5; D. 6. (nota 9)
6. Dintr-o clasă cu 26 de elevi, 14 participă la olimpiada de matematică și 12 la olimpiada de limba română. Dacă 5 elevi participă la ambele olimpiade, atunci numărul elevilor care nu participă nici la olimpiada de matematică, nici la olimpiada de limba română este egal cu:
 A. 5; B. 12; C. 6; D. 7. (nota 9)
7. Dacă $\{3^a, 9^{a-b}, 9^b\} = \{3^{a-2}, 3^{4-b}, 3^{a+b}\}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci $a + b$ este egală cu:
 A. 6; B. 2; C. 4; D. 5. (nota 10)
- Temp de lucru: 50 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare item și 10 puncte din oficiu.**

REZULTATE; INDICAȚII; SOLUȚII; COMENTARII

CAPITOLUL I: 1.1. NUMERE NATURALE. Citirea și scrierea numerelor naturale în sistemul zecimal de numeratie; sirul numerelor naturale 2. a) 150 127; b) 564 019 383. 3. b) 360 027 100.

6. a) 921 765; b) 917 645. 8. 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 131, 162, 193, 231, 262, 293, ..., 993. 9. 321; 642; 963. 10. 24, 27, 29, 42, 47, 49, 72, 74, 79, 92, 94, 97. 11. Sunt 18 numere. 12. 18. 13. a) 100; b) 90. 14. 208 pagini. 15. a) 49, 9, 63, 11; b) 8, 9, 70, 80. c) 30, 16, 15, 28. 16. Se observă că $1 + 2010 = 2011$; $2 + 2009 = 2011$; $3 + 2008 = 2011$ etc. Lui 375 îi corespunde $2011 - 375 = 1636$ etc. 17. a) Observăm că lui 13 îi corespunde răsturnatul numărului $19 = 13 + 6$; lui 15 îi corespunde răsturnatul numărului $21 = 15 + 6$ etc.

b)

205	210	215	220
5	10	15	20

2025	2030	2035
1825	1830	1835

18. Observăm că lui 2 îi corespunde $2 \cdot 2 + 2 = 6$; lui 3 îi corespunde $3 \cdot 3 + 3 = 11$; lui 9 îi va corespunde $9 \cdot 9 + 9 = 90$ etc. 19. a) Lui 9 îi corespunde 10, lui 11 îi corespunde 12; lui 23 îi corespunde 24 etc. b) Lui 1 îi corespunde $1 \cdot 5 = 5$; lui 2 îi corespunde $2 \cdot 5 = 10$; lui 3 îi corespunde $3 \cdot 5 = 15$; lui 8 îi va corespunde $8 \cdot 5 = 40$; etc. lui 200 îi corespunde $200 \cdot 5 = 1000$ etc. 20. a) 2 814; b) 185; c) 296; d) 1. 21. a) 1 099; b) 2 406. 22. 180 și, respectiv, 280 ori. 23. 1935 = MCMXXXV, 1956 = MCMLVI. 24. Exemplu: XCVII = 97. 25. a) XXIV, XLV, XXXIX, LXVII, LXXXVIII, CMLI, MCCXXX, MCCCLIX. 26. $4 \cdot 10 + 8, 5 \cdot 10 + 6, 1 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3$ etc. 27. a) 10 și 99; b) 100 și 999; c) 1000 și 9999; d) 111 și 999; e) 1130 și 9938; f) 1023 și 9876. 28. a) $a = 3, b = 7$; b) $x = y, x^3y$ poate fi 131, 232, 333, 434, 535, 636, 737, 838, 939.

c) $a = b = c, \overline{abc}$ poate fi: 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999. 29. $a = c$. În total 90 de numere. 30. $1 + 2 + a = 1 \cdot 2 \cdot a = 3$. 31. a) Cel mai mic număr rămas este 1234510. b) Cel mai mare număr este 5678910. 32. 400044 și 444000; b) 400444 și 444400. 33. a) 18903452; 18923450; 18903456; 18963450; 18903457; 18973450; 18923456; 18963452; 18923457; 18973452; 18963457; 18973456; etc. 34. Deoarece $400 < \overline{4ab}$ rezultă că a și b sunt cifre nenule: $b = 1$ implică $a = 3$; $b = 2$ implică $a = 6$ și $b = 3$ implică $a = 9$. Deci numerele de forma $\overline{4ab}$ sunt 431; 463 și 493. 35. Răsturnatul numărului $\overline{abcde}$ este numărul $\overline{edcba}$, unde cifrele a și e sunt nenule. $\overline{abcde} = \overline{edcba}$ implică $a = e$; $b = d$. Deci numărul este de forma $\overline{abcba}$, unde b și c iau valorile 0, 1, 2, ..., 9 iar a ia valorile 1, 2, ..., 9, Deci sunt în total $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ de numere. 36. Avem: a) $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$; b) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4$. 37. 1269, 1278, 1359, 1368, 1458, 1467, 2349, 2358, 2457, 3456. 38. $2012 = 9 \cdot 223 + 5$. Numărul cel mai mic este $\overline{99\dots 95}$. 39. Există un număr de o cifră, adică 3.

223 cifre

Există trei numere de două cifre, adică: 30; 12; 21. Există 6 numere de trei cifre, adică: 300; 210; 201; 120; 102; 111. Arătați că există 10 numere de 4 cifre, 15 numere de 5 cifre și 21 numere de 6 cifre. Total: 56 de numere. 40. Observăm că: $1 + 1 = 2$; $3 = 2 + 1$; $5 = 2 + 3$; $8 = 5 + 3$; $13 = 8 + 5$. Deci urmează în șir numerele: $13 + 8 = 21$; $21 + 13 = 34$; $34 + 21 = 55$ și $55 + 34 = 89$. 41. a) 106; 108; 110; 112; sau altă variantă; b) 2002; 2004; 2006; 2008 sau altă variantă; c) 4782; 4784; 4786; 4788 sau altă variantă; d) 2014; 2016; 2018; 2020 sau altă variantă. 42. a) 100; b) 9998; c) 102; d) 98764. 43. a) 201; b) 1023; 1203; 2013; 2031; 2103; 2301 etc. 44. a) pară; b) pară; c) pară; d) impară; e) pară; f) pară. 45. 2435096178. 46. Pe locul al 18-lea. 47. $19 + 19 + 1 = 39$. 48. Pentru scrierea numerelor mai mici decât 100, cifra 3 apare de 20 de ori. Pentru scrierea numerelor cuprinse între $\overline{a00}$ și $\overline{a99}$, unde a ia valorile 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 cifra 3 apare de câte 20 de ori. Pentru scrierea numerelor de forma $\overline{3cd}$, cifra 3 apare de $100 + 20 = 120$ de ori.

Pentru scrierea numerelor de forma $\overline{9ab}$ mai mici decât 981, cifra 3 apare de $20 - 2 = 18$ ori. Prin urmare, cifra 3 este utilizată de $8 \cdot 20 + 120 + 18 = 298$ ori.

I.2. Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Compararea, aproximarea și ordonarea numerelor naturale. Probleme de estimare

5. a) 13 puncte (incluând și originea axei); b) 14 puncte; c) 50 de puncte și, respectiv, 49. 6. M are coordonata $2 + (12 - 2) : 2 = 7$. 7. $2011 - 1000 = 1011$. 8. a) $123 < 321$; b) $1234 > 423$; c) $1112 < 2111$; d) $6565 > 6555$; e), f), g) sunt egale. 10. 12, 72, 91, 93, 131, 345, 981, 1021, 1034. 11. 2039, 1319, 1031, 739, 712, 312, 191, 89, 12. 12. a) 987 și 123; b) 888 și 200; c) 999 și 111; d) 731 și 137; e) 985 și 124. 13. a) 2 posibilități; b) 4 posibilități. 14. 543 210 și 102 345. 15. a) 10 000 000 000; b) 1 023 456 788. 16. 987 654; 102 345. 17. a) 100 023 456; b) 999 876 543. 18. 1000023; 9999876. 19. 78, 79, 89. 20. a) 455, 465, 475, 485, 495. 21. a) 65 210; b) 10 256. 22. 14, 23, 32, 41, 50 etc. 23. 56 498. 24. 453987. 25. 1) $a = 9, b = 7$; 2) $m = 1, n = 2$. 26. 1997. 27. 3 019. 28. 27 556. 29. 169 830. 30. 88 991. 31. 8 197. 32. 100 000, 10 233. 33. 103; 114; 125; 136. 34. Pentru numărul 17342: a) 17340, 17300, 17000; b) 17350, 17400, 18000; c) 17340, 17300, 17000. 35. 2390; 2391; 2392; 2393; 2394. 36. 5475; 5476; 5477; 5478; 5479; 5480. 37. a) 2300; 2301; 2302; ...; 2349. Sunt 50 de numere; b) 2350; 2351; ...; 2399. Sunt 50 de numere. 38. Cel puțin 54000 și cel mult 54999 de spectatori. 39. Austria – 83900; Belgia – 30500; Bulgaria – 110900; Danemarca – 43100; Finlanda – 337000 etc. 40. Distanța dintre București și Amsterdam este estimată până la zece prin: 2520 km (prin lipsă); 2530 km (prin adaos) și prin rotunjire prin 2530 km etc. Distanța dintre Atena și Londra estimată până la sute prin: 3200 km (prin lipsă); 3300 km (prin adaos) și 3300 km (prin rotunjire) etc. 41. De exemplu: Distanța dintre București și Iași este estimată până la 100 prin: 300 km (prin lipsă); 400 km (prin adaos) și 400 km prin rotunjire. Distanța dintre Suceava și Timișoara este estimată până la zece prin: 660 km (prin lipsă); 670 km (prin adaos) și 670 km prin rotunjire. 42. $(2012 + 1004) : 2 = 1508$.

I.3. Operații cu numere naturale. Adunarea numerelor naturale; proprietăți

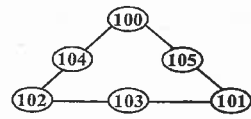
1. 1 089 999. 2. a) $99\,999 + 10\,000 = 109\,999$. 3. a) 3631; b) 1265; c) 6756; d) 4721; e) 9725; f) 5185; g) 18003; h) 27148; i) 433437; j) 949; k) 9820; l) 3363. 4. Se observă că suma numerelor din fiecare linie și din fiecare coloană este 30 și, respectiv, 34. 5. $11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$. 6. $45 = 33 + 3 + 3 + 3 + 3$.

7.	x	210	1321	491	112345	18753	15672
	y	351	579	3142	5747	4635	1235
	$x + 423$	633	1744	914	112768	19176	16095
	$x + y$	561	1900	3633	118092	23388	16907

8. a) 200; b) 13459; c) 250; d) 300; e) 55; f) 51; g) 1275; h) 930; i) 1683; j) 403005. 9. a) 84450351 lei; b) 84450000 lei; c) 84450000 lei. 10. a) 899 999; b) 41 785; c) 1 111 111 110. 11. 28 965, 38 965, 48 965, 29 465, 39 465, 89 465. 12. a) $D = O = 4, G = 6, A = 8, R = 5, I = 7$; b) $L = 1; U = 4, N = 6, A = 4$. 13. a) $1987 + 987 + 87 + 7 = 3068$; b) $195 + 95 + 5 = 295$; $295 + 95 + 5 = 395$; ...; $895 + 95 + 5 = 995$. 14. $VIII + II = X$ sau $VIII + I = IX$; 15. $22 + 2 = 24$. 16. 6 și 4. 17. 4; 18. Vezi figura alăturată.

19. 36. 20. a) 3; b) 7. 21. $24 = 13 + 11$; $36 = 24 + 12$; $36 + 13 = 49$;

$49 + 14 = 63$; $63 + 15 = 78$; $78 + 16 = 94$. 22. a) $246 + 264 + 426 + 462 + 642 + 624 = 2664$; b) $102 + 120 + 124 + 142 + 140 + 104 + 201 + 210 + 214 + 241 + 240 + 204 + 410 + 401 + 412 + 421 + 402 + 420 = 4508$ etc. 23. a) $x + 6 = (x + 5) + 1 = 12 + 1 = 13$; b) $10 + (x + 5) = 10 + 12 = 22$; c) $x + 40 = (x + 5) + 35 = 12 + 35 = 47$; d) $x + x + 12 = (x + 5) + (x + 5) + 2 = 12 + 12 + 2 = 26$. 24. a) $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 = 23$; b) $0 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 = 29$; c) $0 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 35$ sau $2 + 3 + 4 +$



$+ 5 + 6 + 7 + 8 = 35$. 25. 12 și 13 sau 3, 4, 5, 6, 7. 26. $(1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$. 27. $11(a + b) = 110$ de unde $a + b = 10$. Numerele sunt 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. 28. a) $4578 + 285 = 4863$; b) $7859 + 3583 = 11442$. 29. $487 + 148 = 625$; $487 + 625 = 1112$. 30. 5230 iepuri. 31. $473 + 658 + (658 + 106) + (473 + 658) = 3026$ vapoare. 32. 3 posibilități de fiecare dată, deci șansele sunt egale. 33. Deci de la 1 la 49 sunt 25 de numere impare și 24 de numere pare etc. 34. $28 = 9 + 9 + 9 + 1 = 9 + 9 + 5 + 5$. 35. La ora 19:59 obținem suma cifrelor $1 + 9 + 5 + 9 = 24$. 36. Valorile de vârste sunt 5, 6, 7 și, respectiv, 8 ani. Suma lor este 26 ani. Prin urmare mai rămân 14 ani pentru încă doi copii: de 7 ani și doi de 8 ani, sau 1 copil de 5 ani, unul de 6 ani, trei de 7 ani și unul de 8 ani. 37. Se întocmește un tabel cu 3 coloane, prima pentru Andrei, a doua pentru Victor și a treia pentru Codruț. Acolo vom nota ceea ce este afișat la intrarea fiecăruia. Pe prima linie vor fi: 8.00 la Andrei, 8.22 la Victor și 8.44 la Codruț, ș.a.m.d. După ce se înregistrează și ora de la ultima intrare, se calculează sumele și se reține suma maximă de pe fiecare coloană. Astfel obținem că Victor este cel norocos (suma 19). 38. Suma inițială este $1 + 2 + \dots + 10 = 55$. Suma după 11 este $55 + 11 = 66$. Suma după 22 este $66 + 22 = 88$. Suma după 33 este $88 + 33 = 121$. Suma după 44 este $121 + 44 = 165$. Suma după 55 este $165 + 55 = 220$. Suma după 66 este $220 + 66 = 286$. Suma după 77 este $286 + 77 = 363$. Suma după 88 este $363 + 88 = 451$. Suma după 99 este $451 + 99 = 550$. Suma după 100 este $550 + 100 = 650$. Suma după 110 este $650 + 110 = 760$. Suma după 120 este $760 + 120 = 880$. Suma după 130 este $880 + 130 = 1010$. Suma după 140 este $1010 + 140 = 1150$. Suma după 150 este $1150 + 150 = 1300$. Suma după 160 este $1300 + 160 = 1460$. Suma după 170 este $1460 + 170 = 1630$. Suma după 180 este $1630 + 180 = 1810$. Suma după 190 este $1810 + 190 = 2000$. Suma după 200 este $2000 + 200 = 2200$. Suma după 210 este $2200 + 210 = 2410$. Suma după 220 este $2410 + 220 = 2630$. Suma după 230 este $2630 + 230 = 2860$. Suma după 240 este $2860 + 240 = 3100$. Suma după 250 este $3100 + 250 = 3350$. Suma după 260 este $3350 + 260 = 3610$. Suma după 270 este $3610 + 270 = 3880$. Suma după 280 este $3880 + 280 = 4160$. Suma după 290 este $4160 + 290 = 4450$. Suma după 300 este $4450 + 300 = 4750$. Suma după 310 este $4750 + 310 = 5060$. Suma după 320 este $5060 + 320 = 5380$. Suma după 330 este $5380 + 330 = 5710$. Suma după 340 este $5710 + 340 = 6050$. Suma după 350 este $6050 + 350 = 6400$. Suma după 360 este $6400 + 360 = 6760$. Suma după 370 este $6760 + 370 = 7130$. Suma după 380 este $7130 + 380 = 7510$. Suma după 390 este $7510 + 390 = 7900$. Suma după 400 este $7900 + 400 = 8300$. Suma după 410 este $8300 + 410 = 8710$. Suma după 420 este $8710 + 420 = 9130$. Suma după 430 este $9130 + 430 = 9560$. Suma după 440 este $9560 + 440 = 10000$. Suma după 450 este $10000 + 450 = 10450$. Suma după 460 este $10450 + 460 = 10910$. Suma după 470 este $10910 + 470 = 11380$. Suma după 480 este $11380 + 480 = 11860$. Suma după 490 este $11860 + 490 = 12350$. Suma după 500 este $12350 + 500 = 12850$. Suma după 510 este $12850 + 510 = 13360$. Suma după 520 este $13360 + 520 = 13880$. Suma după 530 este $13880 + 530 = 14410$. Suma după 540 este $14410 + 540 = 14950$. Suma după 550 este $14950 + 550 = 15500$. Suma după 560 este $15500 + 560 = 16060$. Suma după 570 este $16060 + 570 = 16630$. Suma după 580 este $16630 + 580 = 17210$. Suma după 590 este $17210 + 590 = 17800$. Suma după 600 este $17800 + 600 = 18400$. Suma după 610 este $18400 + 610 = 19010$. Suma după 620 este $19010 + 620 = 19630$. Suma după 630 este $19630 + 630 = 20260$. Suma după 640 este $20260 + 640 = 20900$. Suma după 650 este $20900 + 650 = 21550$. Suma după 660 este $21550 + 660 = 22210$. Suma după 670 este $22210 + 670 = 22880$. Suma după 680 este $22880 + 680 = 23560$. Suma după 690 este $23560 + 690 = 24250$. Suma după 700 este $24250 + 700 = 24950$. Suma după 710 este $24950 + 710 = 25660$. Suma după 720 este $25660 + 720 = 26380$. Suma după 730 este $26380 + 730 = 27110$. Suma după 740 este $27110 + 740 = 27850$. Suma după 750 este $27850 + 750 = 28600$. Suma după 760 este $28600 + 760 = 29360$. Suma după 770 este $29360 + 770 = 30130$. Suma după 780 este $30130 + 780 = 30910$. Suma după 790 este $30910 + 790 = 31700$. Suma după 800 este $31700 + 800 = 32500$. Suma după 810 este $32500 + 810 = 33310$. Suma după 820 este $33310 + 820 = 34130$. Suma după 830 este $34130 + 830 = 34960$. Suma după 840 este $34960 + 840 = 35800$. Suma după 850 este $35800 + 850 = 36650$. Suma după 860 este $36650 + 860 = 37510$. Suma după 870 este $37510 + 870 = 38380$. Suma după 880 este $38380 + 880 = 39260$. Suma după 890 este $39260 + 890 = 40150$. Suma după 900 este $40150 + 900 = 41050$. Suma după 910 este $41050 + 910 = 41960$. Suma după 920 este $41960 + 920 = 42880$. Suma după 930 este $42880 + 930 = 43810$. Suma după 940 este $43810 + 940 = 44750$. Suma după 950 este $44750 + 950 = 45700$. Suma după 960 este $45700 + 960 = 46660$. Suma după 970 este $46660 + 970 = 47630$. Suma după 980 este $47630 + 980 = 48610$. Suma după 990 este $48610 + 990 = 49600$. Suma după 1000 este $49600 + 1000 = 50600$. Suma după 1010 este $50600 + 1010 = 51610$. Suma după 1020 este $51610 + 1020 = 52630$. Suma după 1030 este $52630 + 1030 = 53660$. Suma după 1040 este $53660 + 1040 = 54700$. Suma după 1050 este $54700 + 1050 = 55750$. Suma după 1060 este $55750 + 1060 = 56810$. Suma după 1070 este $56810 + 1070 = 57880$. Suma după 1080 este $57880 + 1080 = 58960$. Suma după 1090 este $58960 + 1090 = 60050$. Suma după 1100 este $60050 + 1100 = 61150$. Suma după 1110 este $61150 + 1110 = 62260$. Suma după 1120 este $62260 + 1120 = 63380$. Suma după 1130 este $63380 + 1130 = 64510$. Suma după 1140 este $64510 + 1140 = 65650$. Suma după 1150 este $65650 + 1150 = 66800$. Suma după 1160 este $66800 + 1160 = 67960$. Suma după 1170 este $67960 + 1170 = 69130$. Suma după 1180 este $69130 + 1180 = 70310$. Suma după 1190 este $70310 + 1190 = 71500$. Suma după 1200 este $71500 + 1200 = 72700$. Suma după 1210 este $72700 + 1210 = 73910$. Suma după 1220 este $73910 + 1220 = 75130$. Suma după 1230 este $75130 + 1230 = 76360$. Suma după 1240 este $76360 + 1240 = 77600$. Suma după 1250 este $77600 + 1250 = 78850$. Suma după 1260 este $78850 + 1260 = 80110$. Suma după 1270 este $80110 + 1270 = 81380$. Suma după 1280 este $81380 + 1280 = 82660$. Suma după 1290 este $82660 + 1290 = 83950$. Suma după 1300 este $83950 + 1300 = 85250$. Suma după 1310 este $85250 + 1310 = 86560$. Suma după 1320 este $86560 + 1320 = 87880$. Suma după 1330 este $87880 + 1330 = 89210$. Suma după 1340 este $89210 + 1340 = 90550$. Suma după 1350 este $90550 + 1350 = 91900$. Suma după 1360 este $91900 + 1360 = 93260$. Suma după 1370 este $93260 + 1370 = 94630$. Suma după 1380 este $94630 + 1380 = 96010$. Suma după 1390 este $96010 + 1390 = 97400$. Suma după 1400 este $97400 + 1400 = 98800$. Suma după 1410 este $98800 + 1410 = 100210$. Suma după 1420 este $100210 + 1420 = 101630$. Suma după 1430 este $101630 + 1430 = 103060$. Suma după 1440 este $103060 + 1440 = 104500$. Suma după 1450 este $104500 + 1450 = 105950$. Suma după 1460 este $105950 + 1460 = 107410$. Suma după 1470 este $107410 + 1470 = 108880$. Suma după 1480 este $108880 + 1480 = 110360$. Suma după 1490 este $110360 + 1490 = 111850$. Suma după 1500 este $111850 + 1500 = 113350$. Suma după 1510 este $113350 + 1510 = 114860$. Suma după 1520 este $114860 + 1520 = 116380$. Suma după 1530 este $116380 + 1530 = 117910$. Suma după 1540 este $117910 + 1540 = 119450$. Suma după 1550 este $119450 + 1550 = 121000$. Suma după 1560 este $121000 + 1560 = 122560$. Suma după 1570 este $122560 + 1570 = 124130$. Suma după 1580 este $124130 + 1580 = 125710$. Suma după 1590 este $125710 + 1590 = 127300$. Suma după 1600 este $127300 + 1600 = 128900$. Suma după 1610 este $128900 + 1610 = 130510$. Suma după 1620 este $130510 + 1620 = 132130$. Suma după 1630 este $132130 + 1630 = 133760$. Suma după 1640 este $133760 + 1640 = 135400$. Suma după 1650 este $135400 + 1650 = 137050$. Suma după 1660 este $137050 + 1660 = 138710$. Suma după 1670 este $138710 + 1670 = 140380$. Suma după 1680 este $140380 + 1680 = 142060$. Suma după 1690 este $142060 + 1690 = 143750$. Suma după 1700 este $143750 + 1700 = 145450$. Suma după 1710 este $145450 + 1710 = 147160$. Suma după 1720 este $147160 + 1720 = 148880$. Suma după 1730 este $148880 + 1730 = 150610$. Suma după 1740 este $150610 + 1740 = 152350$. Suma după 1750 este $152350 + 1750 = 154100$. Suma după 1760 este $154100 + 1760 = 155860$. Suma după 1770 este $155860 + 1770 = 157630$. Suma după 1780 este $157630 + 1780 = 159410$. Suma după 1790 este $159410 + 1790 = 161200$. Suma după 1800 este $161200 + 1800 = 163000$. Suma după 1810 este $163000 + 1810 = 164810$. Suma după 1820 este $164810 + 1820 = 166630$. Suma după 1830 este $166630 + 1830 = 168460$. Suma după 1840 este $168460 + 1840 = 170300$. Suma după 1850 este $170300 + 1850 = 172150$. Suma după 1860 este $172150 + 1860 = 174010$. Suma după 1870 este $174010 + 1870 = 175880$. Suma după 1880 este $175880 + 1880 = 177760$. Suma după 1890 este $177760 + 1890 = 179650$. Suma după 1900 este $179650 + 1900 = 181550$. Suma după 1910 este $181550 + 1910 = 183460$. Suma după 1920 este $183460 + 1920 = 185380$. Suma după 1930 este $185380 + 1930 = 187310$. Suma după 1940 este $187310 + 1940 = 189250$. Suma după 1950 este $189250 + 1950 = 191200$. Suma după 1960 este $191200 + 1960 = 193160$. Suma după 1970 este $193160 + 1970 = 195130$. Suma după 1980 este $195130 + 1980 = 197110$. Suma după 1990 este $197110 + 1990 = 199100$. Suma după 2000 este $199100 + 2000 = 201100$. Suma după 2010 este $201100 + 2010 = 203110$. Suma după 2020 este $203110 + 2020 = 205130$. Suma după 2030 este $205130 + 2030 = 207160$. Suma după 2040 este $207160 + 2040 = 209200$. Suma după 2050 este $209200 + 2050 = 211250$. Suma după 2060 este $211250 + 2060 = 213310$. Suma după 2070 este $213310 + 2070 = 215380$. Suma după 2080 este $215380 + 2080 = 217460$. Suma după 2090 este $217460 + 2090 = 219550$. Suma după 2100 este $219550 + 2100 = 221650$. Suma după 2110 este $221650 + 2110 = 223760$. Suma după 2120 este $223760 + 2120 = 225880$. Suma după 2130 este $225880 + 2130 = 228010$. Suma după 2140 este $228010 + 2140 = 230150$. Suma după 2150 este $230150 + 2150 = 232300$. Suma după 2160 este $232300 + 2160 = 234460$. Suma după 2170 este $234460 + 2170 = 236630$. Suma după 2180 este $236630 + 2180 = 238810$. Suma după 2190 este $238810 + 2190 = 241000$. Suma după 2200 este $241000 + 2200 = 243200$. Suma după 2210 este $243200 + 2210 = 245410$. Suma după 2220 este $245410 + 2220 = 247630$. Suma după 2230 este $247630 + 2230 = 249860$. Suma după 2240 este $249860 + 2240 = 252100$. Suma după 2250 este $252100 + 2250 = 254350$. Suma după 2260 este $254350 + 2260 = 256610$. Suma după 2270 este $256610 + 2270 = 258880$. Suma după 2280 este $258880 + 2280 = 261160$. Suma după 2290 este $261160 + 2290 = 263450$. Suma după 2300 este $263450 + 2300 = 265750$. Suma după 2310 este $265750 + 2310 = 268060$. Suma după 2320 este $268060 + 2320 = 270380$. Suma după 2330 este $270380 + 2330 = 272710$. Suma după 2340 este $272710 + 2340 = 275050$. Suma după 2350 este $275050 + 2350 = 277400$. Suma după 2360 este $277400 + 2360 = 279760$. Suma după 2370 este $279760 + 2370 = 282130$. Suma după 2380 este $282130 + 2380 = 284510$. Suma după 2390 este $284510 + 2390 = 286900$. Suma după 2400 este $286900 + 2400 = 289300$. Suma după 2410 este $289300 + 2410 = 291710$. Suma după 2420 este $291710 + 2420 = 294130$. Suma după 2430 este $294130 + 2430 = 296560$. Suma după 2440 este $296560 + 2440 = 299000$. Suma după 2450 este $299000 + 2450 = 301450$. Suma după 2460 este $301450 + 2460 = 303910$. Suma după 2470 este $303910 + 2470 = 306380$. Suma după 2480 este $306380 + 2480 = 308860$. Suma după 2490 este $308860 + 2490 = 311350$. Suma după 2500 este 31135

16.

a	b	c	$a \cdot (b \cdot c)$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot (b - c)$	$ab - bc$
25	19	13	6175	800	150	150
24	18	12	5184	720	144	144
13	8	7	728	195	13	13
124	96	66	785664	20088	3720	3720
30	20	13	7800	990	210	210
19	17	13	4199	570	76	76

17. a) 864; b) 6480. 18. a) 3300; b) 608200; c) 10600; d) 78400. 19. a) 33 și 40; b) 5 + 7 · 99 = 698. 20. 1986825. 21. 10980. 22. $12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$; $12 = 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$; $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$. 23. $21 = 3 \cdot 7 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{11 \text{ factori}} = 3 + 7 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{11 \text{ termeni}}$. 24. 56. 25. $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{71 \text{ factori}} \cdot 7 \cdot 13 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{71 \text{ termeni}} + 7 + 13 = 91$.

26. 1, 3, 4. 27. 20 bănci, 33 elevi. 28. 1345 kg. 29. 111. 30. 24, 30, 36, 42 sau 48. 31. $25 \cdot 24 = 600$ de scrisori. 32. a) 520; b) 155; c) 2; d) 16. 33. a) 105 și 49; b) 490; c) 189. 34. a) 2 739; b) 0; c) 1997. 35. a) 4; b) 5; c) 6. 36. a) 375 700; b) 475 600; c) 0; d) 15800; e) 0; f) 12450. 37. a) $1\,997 \cdot 315 + 1\,997 \cdot 475 + 1\,997 \cdot 1\,210 = 1\,997 \cdot (315 + 475 + 1\,210) = 1\,997 \cdot 2\,000 = 3\,994\,000$. b) $34 \cdot (15\,345 + 75\,655 - 41\,000) = 34 \cdot 50\,000 = 1\,700\,000$. c) 0; d) 1 997. 38. În ambele cazuri se obține 3. 39. 250. 40. 58 și 9280. 41. $a = 45$, $b = 9$, $c = 0$ sau $a = b = 0$ și $c = 54$. 42. 70. 43. 960. 44. $a = 50$ și $ab + 2ac = a(b + 2c) = 50 \cdot 40$. 45. Scăzând și adunând parte cu parte relațiile date în enunț se obține: $a + c = 32$ și $3a + 2b + 3c = 82$. 46. 360. 47. 73. 48. Avem: $4a + 9b + 5c = 4(a + b) + 5(b + c) = 4 \cdot 20 + 5 \cdot 40 = 280$ și $b^2 + ab + ac + bc = (b^2 + ab) + (ac + bc) = b(a + b) + c(a + b) = (a + b)(b + c) = 40 \cdot 20 = 800$. 49. $a = 16$, $b = 0$ sau $a = 13$, $b = 1$ sau $a = 10$, $b = 2$ sau $a = 7$, $b = 3$ sau $a = 4$, $b = 4$ sau $a = 1$, $b = 5$. 50. $x = 6$, $y = 0$, $z = 7$. 51. Avem: $10a + b + 10a + b + a = 10b + a$, de unde $20a = 8b$, sau $5a = 2b$, de unde $a = 2$ și $b = 5$. Deci $\overline{ab} = 25$. 52. $\overline{abc} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + a + b + c = 100a + 10b + c + 10a + b + 10b + c + 10c + a + a + b + c = 112a + 22b + 13c = 195$. Se observă că $a = 1$. Deci $22b + 13c = 195 - 112 = 83$. Deci $b \leq 3$ și $b \neq 0$ putem avea $b = 1$, $b = 2$ sau $b = 3$. $b = 1$ implică $13c = 83 - 22 = 61$, nu convine; $b = 2$ implică $13c = 83 - 44 = 39$, de unde $c = 3$; $b = 3$ implică $13c = 83 - 66 = 17$, nu convine. Deci $\overline{abc} = 123$. 53. a) $a = c$; b) 2; c) 0. 54. a) 23 de puncte și, respectiv, 24 de puncte. b) De exemplu: Punctaj total = $1 \cdot S + 2 \cdot C + 1 \cdot E + 1 \cdot I$. 55. $24 + 23 + \dots + 2 + 1 = (24 \cdot 25) : 2 = 12 \cdot 25 = 300$ de partide. 56. $14 = 13 + 1 = 12 + 2 = 11 + 3 = 10 + 4 = 9 + 5 = 8 + 6 = 7 + 7$. Produsul maxim este egal cu $7 \cdot 7 = 49$ (se obține când termenii sumei sunt egali). 57. $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$. Suma minimă se obține când factorii produsului sunt egali, adică $6 + 6 = 12$. 58. Primul parcurge $20 \text{ km} \cdot 4 = 80 \text{ km}$, iar al doilea $18 \cdot 4 = 72 \text{ km}$. Distanța este de 152 km sau $4 \cdot (20 + 18) = 152 \text{ km}$. 59. a) Produsul cifrelor unităților factorilor produsului este: $2 \cdot 5 \cdot 9 = 90$, deci ultima cifră este 0; b) $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 30$, deci ultima cifră este 0; c) $4 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 = 84$, deci ultima cifră este 4; d) $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 = 648$, deci ultima cifră este 8. 60. a) cel mult 4 cifre și cel puțin 3 cifre; b) cel mult 7 cifre și cel puțin 6 cifre. 61. a) $5 \cdot (1 + 2 + \dots + 401 + 402) : (1 + 2 + 3 + \dots + 401 + 402) = 5$; b) $4(1 + 2 + 3 + \dots + 502 + 503) : [2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 503)] = 2$; c) $(1006 + 1)^2 = 1007^2 = 1014049$ pentru că $2013 = (1006 \cdot 2 + 1)$; d) Putem scrie $(1 + 5 \cdot 0) + (1 + 5 \cdot 1) + \dots + (1 + 5 \cdot 2) + \dots + (1 + 5 \cdot 401) + (1 + 5 \cdot 402) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{403 \text{ termeni}} + 5 \cdot (1 + 2 + \dots + 402) = 403 + 5 \cdot [(402 \cdot 403) : 2] = 403 + 5 \cdot 201 \cdot 403 = 403 \cdot (1 + 1005) = 403 \cdot 1006 = 405418$;

e) **Aver:** $(1 + 3 \cdot 0) + (1 + 3 \cdot 1) + (1 + 3 \cdot 2) + \dots + (1 + 3 \cdot 370) + (1 + 3 \cdot 371) =$
 $= \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{372 \text{ termeni}} + 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 370 + 371) = 372 + 3 \cdot (371 \cdot 372) : 2 = 372 + 3 \cdot 371 \cdot 186 =$
 $= 186 \cdot (2 + 371 \cdot 3) = 186 \cdot (2 + 1113) = 186 \cdot 1115 \text{ etc; } \mathbf{\text{f) Aver:}} (4 + 5 \cdot 0) + (4 + 5 \cdot 1) +$
 $+ (4 + 5 \cdot 2) + \dots + (4 + 5 \cdot 401) + (4 + 5 \cdot 402) = \underbrace{4+4+\dots+4}_{403 \text{ termeni}} + 5 \cdot (1 + 2 + \dots + 401 + 402) =$
 $= 403 \cdot 4 + 5 \cdot (402 \cdot 403) : 2 = 403 \cdot 4 + 5 \cdot 201 \cdot 403 = 403 \cdot (4 + 1005) = 403 \cdot 1009 \text{ etc.}$
62. $S = 15 \cdot 7 + 15 \cdot 8 + \dots + 15 \cdot 65 + 15 \cdot 66 = 15 \cdot (7 + 8 + \dots + 66) = 15 \cdot [(1 + 2 + \dots + 65 + 66) -$
 $- (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)] = 15 \cdot [(66 \cdot 67) : 2 - (6 \cdot 7) : 2] = 15 \cdot (33 \cdot 67 - 21) \text{ etc. } \mathbf{63.} a + 2a +$
 $+ 3a + \dots + 99a + 100a = a \cdot (1 + 2 + \dots + 100) = a \cdot (100 \cdot 101) : 2 = 5050a = 10100, \text{ de unde}$
 $a = 2. \mathbf{64.} a = (1 + 99) + (3 + 97) + \dots + (49 + 51) = \underbrace{100+100+\dots+100}_{25 \text{ termeni}} = 100 \cdot 25 = 2500.$

$b = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 40) = 3 \cdot (40 \cdot 41) : 2 = 60 \cdot 41 = 2460$. Deci $a > b$. 65. 9 plăcinte.

66. $\frac{1+1+\dots+1}{96 \text{ termeni}} + 1 + 2 + 5 + 2 + 5 = 110$. 67. 13. 68. Calculăm câte alune ar trebui să fie acum:

75 + 7 · 8 = 131, prin urmare a reușit să fure 3 alune. 69. a) Codul Mirunei: 5078 + 1279 = 6357, iar al lui Tudor: 6357 + 2 · 1279 = 6357 + 2558 = 8915. Deci seria de coduri este 5078 – 6357 – 8915.

b) Codul lui Vlad: 7054 – 1279 = 5775, iar al lui Tudor: 7054 + 2558 = 9612. Acum seria de coduri este 5775 – 7054 – 9612. c) Miruna are: 5231 – 2558 = 2673, iar Vlad 2673 – 1279 = 1394. Așa că seria codurilor va fi acum 1394 – 2673 – 5231. 70. 485 · 25 = 12125 lei. 71. Persoana mai înaltă are 52 · 4 + 52 : 2 = 208 + 26 = 234 cm, iar pentru persoana mai scundă 234 – 182 = 52 cm. 72. 8696 – 860 = 7836, 7836 : 2 = 3918. Deci Alexandru are 3918 zile.

care după o împărțire la 365 ne spune că are 10 ani împliniți, iar Marcel are 3918 – 860 = 4778 zile adică 13 ani împliniți. 73. Albinuța trebuie să facă 90 : 3 = 30 de drumuri. Un drum stradal (colectare) - stup (depozitare) - strat înseamnă 1 min și 30 s + 6 min + 1 min + 6 min = 14 min și 30 s. face 29 astfel de drumuri și al 30-lea incomplet pentru că rămâne la stup deoarece a adus tot nectarul din flori. Așa că are nevoie de 14 min · 29 + 30 s · 29 + 1 min și 30 s + 6 min + 1 min = 406 min + 870 s + 8 min și 30 s = 406 min + 14 min și 30 s + 8 min și 30 s = 429 min = 7 h și 9 min. 74. Dacă coșul are 700 g, atunci trebuie să rămână în coș fructe care să cântărească maxim 3300 g. Observăm că un măr, o pară și o portocală au împreună 180 g + 240 g + 200 g = 620 g. Așa că dacă rămân câte 5 din fiecare o să cântărească 5 · 620 g = 3100 g iar cu o portocală se atinge maximul admis. Deci Alex trebuie să ia din coș 2 mere, 2 pere și o portocală.

I.6. Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor rotunde, pătrate și acolade 1. a) 229; b) 305; c) 312; d) 4345; e) 108; f) 2539; g) 463; h) 1857; i) 259; j) 72. 2. a) 17; b) 2755; c) 222; d) 1024; e) 442; f) 2000; g) 0; h) 0. 3. a) 55; b) 596; c) 5817; d) 6200; e) 162; f) 5. 4. a) 1628; b) 30250; c) 921; d) 402; e) 15427; f) 1.

Test 1 1. 3000303. 2. 102345. 3. 2005. 4. a) 2576; b) 2009; c) 864; d) 702. 5. a) 2006; b) 2. 6. a) 401000; b) 2. 7. 136 și 549. 8. 49, 105, 212.

Test 2 1. a) 1908; b) 23; c) 9876; 2. a) 1115; b) 19; c) 1215; d) 515; e) 6. 3. a) 89; b) 62; c) 625; d) 45. 4. 80 de pagini. 5. 270, 302 și 135. 6. a) 27 și 33; b) $6 \cdot 99 + 3 = 597$; c) $(6 \cdot 0 + 3) + (6 \cdot 1 + 3) + \dots + (6 \cdot 49 + 3) = 6 \cdot (1 + 2 + \dots + 49) + 3 \cdot 50 = 6 \cdot 49 \cdot 50 : 2 + 150 = 150(49 + 1) = 7500$.

Test 3 1. 114; 122; 141; 212; 221; 411. 2. 102; 111; 120; 201; 300; 210. 3. $(7183 + 2752) \cdot (485 - 475) = 9935 \cdot 10 = 99350$. 4. a) 2686; b) 6811; c) 6036; d) 494; e) 223. 5. 999 și 2001. 6. 28; 30 și 32. 7. $(x - 27) \cdot 3 + 10 = 100$, de unde $x = 57$.

Test 4 1.

7	11	5	7	11	5	7	11	5
---	----	---	---	----	---	---	----	---

2. a și b au câte zece valori. Sunt $10 \cdot 10 = 100$ de numere. 3. $83 \cdot 2 - 88 : 4 = 166 - 22 = 144$. 4. a) 198; b) 202; c) 152; d) 861; e) 13; f) 2. 5. a) 3924; b) 445; c) 3706; d) 4668. 6. $218 + (218 - 42) + (218 - 42) : 2 = 482$. Răspuns afirmativ. 7. Fie a, b, c cele trei numere. Avem relațiile: $2 \cdot a = b - 2 = c + 7$, de unde $b = 2a + 2$; $c = 2a - 7$ și $a + b + c = a + 2a + 2 + 2a - 7 = 220$, de unde $a = 45$, $b = 92$ și $c = 83$.

I.7. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural; compararea puterilor care au aceeași bază sau același exponent

1. a) 3^4 ; b) 7^5 ; c) 9^8 ; d) 16^3 ; e) 1^{1000} ; f) a^{10} . 2. a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; b) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$; c) $0 \cdot 0 \cdot 0$; d) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$; e) $1997 \cdot 1997$; f) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$. 3. a) exponentul 4, baza 7; b) exponentul 0, baza 7 etc. 4. a) 5^3 ; b) 10^0 ; c) 10^{10} ; d) 4^3 ; e) 2012^{2011} ; f) nu este definită. 5. a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256; 512, 1024, 2048, 4096; b) 0, 1, 1, 2000; c) 512, 1728, 81, 1000, 10000, 729; d) 2187, 121, 196, 27000, 15625, 303, 1; e) 512, 144, 15129, 0, 1, 1; f) 243, 729, 1331, 169, 62500; g) 25, 125, 625, 225, 3375; h) 49, 343, 2401, 289, 4913; i) 36, 216, 1296, 256, 4096; j) 64, 324, 784, 1444, 2304; k) 81, 361, 841, 1521, 2401; l) 10201, 10404, 10609, 10816, 1000000. 6. a) 2^{49} ; b) 3^{58} ; c) 5^{12} . 7. a) 121; b) 12321; c) 1234321; d) 123454321; e) 12345654321. Ce observați? 8. a) $100 + 1000 + 10000 = 11100$; b) $1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111$; c) $10 + 100 + 1000 = 1110$ etc. 9. a) $2^4 \cdot 7^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 7^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 7^3 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 2 \cdot 7^3 \cdot 10^3$. Se termină în 3 zerouri etc. 10. a) 16; b) 32; c) 85; d) 160; e) 400; f) 68; g) 240; h) 144; i) 720; j) 680; k) 840; l) 234; m) 260; n) 1300; o) 800; p) 400. 11. a) 14; b) 155; c) 10; d) 88; e) 70; f) 33; g) 111; h) 226; i) 0; j) 3; k) 31; l) 121; m) 341; n) 781; o) 1555; p) 2801; r) 11111.

12.

a	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
2	1	2	4	8	16	32	64
3	1	3	9	27	81	243	
5	1	5	25	125	625		
6	1	6	36	216			

13. a) 1; 0; 2100; 1; b) 324; 1331; 165649; c) 729; 3125; 256; 10000000; d) 22; e) 116; f) 170; g) 680; h) 400; i) 16; j) 130; k) 10; l) 88; m) 70; n) 33; o) 26; p) 78. 14. a) 84; b) 12; c) 6; d) 10 609; e) 0; f) 1 024; g) 3600; h) 105; i) 70; j) 254; k) 2486; l) 288; m) 4; n) 224. 15. a) 0; b) 36; c) 4; d) 124; e) 132; f) 19; g) 999; h) 3; i) 9; j) 8; k) 673; l) 3; m) 0. 16. a) 327; b) $33^3 = 35\,937$. 17. a) 7; b) 30; c) 4; d) 5; e) 10; f) 8; g) 5; h) 13; i) 12; j) 4; k) 243; l) 4; m) 729; n) 3; o) 3; p) 4; r) 3; s) 4. 18. a) 1996; b) 1. 19. a) ; b) ; c) ; d) ; f) egale; e) $0^{50} < 1^5$; g) $5^6 > 5^5$; h) $11^{11} > 11^{10}$; 20. a) $80^{10} > 80^9$; b) $120^8 > 120^6$; c) $2008^3 > 2008^2$; d) $120^{121} < 121^{121}$; e) $45^{45} > 43^{45}$; f) $2008^4 > 2007^4$; g) $(11^2)^8 > (11^7)^7$; h) $4^9 > 4^8$; i) $42^6 < 42^7$. 21. a) $2^7 > 2^5$; b) $5^2 = 3^2 + 4^2$; c) $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$. 22. a) $2^3, 32, 4^3, 2^7, 2^8$; b) $3, 3^2, 3^3, 9^2, 9^3$. 23. a) $3^{27} = 3^8 > 3^6 = (3^2)^3$; b) $5^{3^2} = 5^9 > 5^6 = (5^3)^2$; c) $7^{30} = 49^{15}$; d) $(2^6)^2 = 2^{12} < 2^{64} = 2^{2^6}$. 24. a) 0,1,2,3; b) 0; c) 6; d) 0, 1, 2; e) 0; f) 2; g) 2. 25. a) $2 < 2^2 < 10$; $2 < 2^3 < 10$, deci x ia valorile 2 și 3; b) $10^2 = 100$ și $11^2 < 122$, deci x ia valorile 10 și 11; c) $80 \leq 10^2 < 101$, deci $x = 10$; d) x ia valorile 4, 5, 6 și 7 etc. 26. a) $2^{33} < 3^{33}$; b) $5^{405} > 4^{405}$; c) $4^{101} < 3^{202}$; d) egale; e) $2^{52} < 3^{35} \cdot 9^{17} \Leftrightarrow 2^{52} < 3^{35} \cdot 3^{34} \Leftrightarrow 2^{52} < 3^{34} \cdot (3-1) \Leftrightarrow 2^{51} < 3^{34} \Leftrightarrow 8^{17} < 9^{17}$; f) $2^{3^5} = (2^3)^{81} = 8^{81} < 9^{81} = 9^{9^2}$; g) $3^{70} = (3^3)^{35} \cdot 2^{105} = (2^3)^{35}$. 27. Mai întâi calculăm câte luni avem. $4 \cdot 12 = 48$ luni. Adică $48 : 8 = 6$ serii de multiplicări. O frunză de acum va avea după 4 ani $3^6 = 729$ frunze. Pentru că acum sunt 5 frunze, după 4 ani vor fi în total $5 \cdot 729 = 3645$ frunze.

I.8. Pătratul și cubul unui număr natural; pătratele perfecte, cuburile perfecte.

Ultima cifră a unui număr natural

1. a) $64; 3^6; 2^4; 15^6; 3(2^4 + 2^5); 2^4 + 3^2; 5^6 + 7 \cdot 5^7; 7^{12}; 6^{2n} + 8 \cdot 6^{2n+1}; 1^0 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^7$. b) $7^6; 5^3; 64; 1000; 2^1 \cdot 3^2 + 3^2; 3^6 + 7 \cdot 3^8; 2^3 + 2^2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^2 + 3^3; 7^{3n}$. 2. 16; 25; 36; 49; 64; 81. 3. 225; 256; 289; 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625. 4. 1600; 2500; 3600; 4900; 6400; 8100. 5. 1, 8, 27, 64, 125. 6. 125, 216, 343, 512, 729. 7. 27000; 64000. 8. $\overline{ab} \in \{29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92\}$. 9. $N = 22(a + b + c)$. a) $a + b + c = 22$, $\overline{abc} \in \{589; 679\}$; b) nu există. 10. Nu. Contraexemplu: $n = 1$ implică $n + 17 = 18$ - nu este pătrat perfect. 11. $N = 1997^2$; $P = 999^2$; $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$. 12. $A = (2^{2n+2} \cdot 3^{n+2})^2$. 13. Numerele $6k, 8k$ și $10k$, unde $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sunt de asemenea pitagoreice. Există și alte triplete de numere naturale care sunt numere pitagoreice, de exemplu: $(3, 4, 5)$; $(5, 12, 13)$; $(20, 21, 29)$ etc. 14. $25 = 3^2 + 4^2$; $34 = 5^2 + 3^2$; $41 = 5^2 + 4^2$; $65 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$; $130 = 11^2 + 3^2 = 9^2 + 7^2$. 15. $U(a) = 7$; $U(b) = 2$. 16. $n = 0 \Rightarrow U(N) = 8$. $n > 0 \Rightarrow U(5 \cdot 2^n) = 0 \Rightarrow U(N) = 3$. 17. $U(n) = 3$. 18. $n = (2^{993})^2$. 19. $U(N) = 7$, dacă n par și $U(N) = 2$, dacă n impar etc. 20. $12^2 + 3^2 + 4^2$. 21. Cifra zecilor lui N este 1 și a unităților este 0. N este de forma $4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. 22. $n = 3$. 23. $U(N) = 3$ etc. 24. Nu. 25. $aaa = a \cdot 111 = 3 \cdot 37 \cdot a$ etc. 26. $N = 1003^2$. 27. Fie $n = \overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$. Dacă n ar fi pătrat perfect, atunci ar rezulta că $a - c$ se împarte exact la 11, imposibil pentru că a și c sunt cifre distincte. 28. Ultimele trei cifre ale numărului n sunt egale cu cifrele sumei $625 + 256 + 81 + 16 + 1 + 1 = 980$. 29. $x = (9 + 8 \cdot 9) + 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^3 + \dots + 8 \cdot 9^{n-1} = (9^2 + 8 \cdot 9^2) + 8 \cdot 9^3 + \dots + 8 \cdot 9^{n-1} = (9^3 + 8 \cdot 9^3) + \dots + 8 \cdot 9^{n-1} = \dots = 9^{n-1} + 8 \cdot 9^{n-1} = 9^n = (3^2)^n = (3^n)^2$. Deci x este pătrat perfect; $y = 7 + (5 + 4 \cdot 5) + 4 \cdot 5^2 + \dots + 4 \cdot 5^{n-1} + 8 \cdot 9^{n-1} = 9^n = (3^2)^n = (3^n)^2$. Deci x este pătrat perfect; $y = 7 + (5 + 4 \cdot 5) + 4 \cdot 5^2 + \dots + 4 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot 5^n = 7 + (5^2 + 4 \cdot 5^2) + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^n = 7 + 5^{n+1}$; y are ultima cifră 7 sau 2. 30. a) $(a - b) \cdot (a + b) = (a - b)a + (a - b)b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$. b) 1997^3 . 31. 6, 8, 4 și, respectiv, 2. 32. a) 6; b) 8; c) 7; d) 4; e) 5; f) 6; g) 7; h) 4; i) 9. 33. a) $U(1972^{1973}) = U(2^{1973}) = U(2^{493 \cdot 4 + 1}) = U(2^1) = 2$; g) $U(1978^{1979}) = U(8^{1979}) = U(8^{494 \cdot 4 + 2}) = U(8^2) = 4$. 34. 1. 35. 1 000...0. 36. $1990^{1992} = 199^{1992} \cdot 10^{1992}$. Numărul se termină în 1992 zerouri, iar ultima cifră nenulă este $U(199^{1992}) = U(9^{1992}) = 1$. 37. a) Pentru $n = 0$, $U(a) = 8$. Pentru n natural nenul, $U(a) = 2$; b) Se vor analiza pe rând cazurile: i) $n = 4k$; ii) $n = 4k + 1$; j) $n = 4k + 2$; jj) $n = 4k + 3$, unde $k \in \mathbb{N}$. 38. a) 5 zerouri și ultima cifră diferită de zero este 4; b) 1998 zerouri și ultima cifră diferită de zero este 5; c) 80 zerouri și ultima cifră diferită de zero este 2. 39. 5. 40. $a \cdot b = 2^6 \cdot 7^6 \cdot 11^{14} \cdot 10^8$. Numărul se termină în 8 zerouri și $U(a \cdot b) = 6$. 41. 5 și 4. 42. 6. 43. 7. 44. 0. 45. Căutăm un pătrat perfect cât mai apropiat de 135 și mai mic decât acesta. Este 121. Prin urmare se pot primi $135 - 121 = 14$ dale.

Test 5 1. 576; 2. 216; 3. 8; 4. 30; 5. a) 17; b) 12; c) 0; d) 4; 6. $a = 7$; $b = 1$; $c = 1$; $a^b + a^c = 7^1 + 7^1 = 14$. 7. $a = 0$, $b = 1$ etc. 8. a) 36; b) 500^2 . 9. $2^{2001} < 3^{2001} < 3^{2002}$.

Test 6 1. a) 33; b) 36; c) 4018050; d) 64. 2. $a = 9$, $b = 17$, $a + b = 26$; 3. a) $5^{101} < 5^{103} < 5^{107} < 5^{204} < 5^{242}$; b) $2^{100} < 5^{100} < 8^{100} < 9^{100} < 17^{100}$; 4. 32; 5. a) 128; b) 0; 6. 2; 7. $N = 2005 + 2 \cdot 2004 \cdot 2005 : 2 = 2005 + 2004 \cdot 2005 = 2005 \cdot (1 + 2004) = 2005 \cdot 2005 = 2005^2$. 8. $N + 2 = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2007} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2007} = 2 \cdot 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2007} = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2007} = \dots = 2^{2007} + 2^{2007} = 2^{2008}$.

I. 9. Împărțirea, cu rest zero, a numerelor naturale când împărțitorul are mai mult de o cifră.

Împărțirea cu rest a numerelor naturale 1. a) $3 \cdot 3 + 2 = 11$; $4 \cdot 3 + 2 = 14$; b) $2 \cdot 4 + 2 = 10$; $7 \cdot 4 + 2 = 30$; c) $2 \cdot 21 + 2 = 44$; $10 \cdot 21 + 2 = 212$ etc. 2. a) $2 \cdot 15 + 13 = 43$; $5 \cdot 15 + 13 = 88$; b) $7 \cdot 20 + 13 = 153$; $10 \cdot 20 + 13 = 213$ etc. 3. a) 13; b) 16; c) 37; d) 55; e) 67; f) 231; g) 5; h) 8; i) 6; j) 3; k) 5; l) 77; m) 18; n) 9; o) 31; p) 1997; r) 234; s) 221; ș) 443; t) 1974. 4. a) 13; b) 16;

c) 37; d) 55; e) 48; f) 239; g) 35; h) 73; i) 47; j) 31; k) 980; l) 53; m) 1997; o) 443; p) 45; q) 23; r) 47; s) 152; t) 234; u) 221. 5. a) câțul 29, restul 2; b) câțul 114, restul 3; c) 67, rest 1; d) 152; e) 476, rest 1; f) 374, rest 3; g) 170, rest 12; h) 262, rest 19; i) 236, rest 1; j) 388, rest 63; k) 476, rest 28; l) 97, rest 143. 6. Câțul, respectiv restul sunt: a) 38 și 1; b) 41 și 1; c) 196 și 7; d) 913 și 13; e) 109 și 10; f) 39 și 500; g) 96 și 10; h) 43 și 84; i) 97 și 236. 7. a) F; b) A; c) F; d) A. 8. a) $n = 13$; b) $n = 503$; c) nu are soluție; d) $n = 5$; e) $n = 5$; f) $n = 24 \cdot 8 = 192$; g) $n = 9 \cdot 8 = 72$; h) $12 + n = 16 \cdot 4 = 64$, de unde $n = 64 - 12 = 52$; i) $3 - n = 2$, de unde $n = 1$; j) $5 + 2n = 30 : 6 = 5$, de unde $n = 0$; k) $11 - n = 9$, de unde $n = 2$; l) $20 + 10n = 90$, de unde $10n = 70$ și $n = 7$; m) $9 - 2n = 3$, de unde $2n = 6$ și $n = 3$; n) $4 - n = 1$ și $5 - n = 12$ sau $4 - n = 12$ și $5 - n = 1$ sau $4 - n = 2$ și $5 - n = 6$ sau $4 - n = 6$ și $5 - n = 2$ sau $4 - n = 3$ și $5 - n = 4$ sau $4 - n = 4$ și $5 - n = 3$. Singura soluție este $n = 1$; o) $n = 2$. 9. a) $n \leq 1$; b) $n \leq 2$; c) $n \leq 1$; d) $n \leq 4$; e) $n \leq 11$; f) $n \leq 2$; g) $n \leq 4$; h) $n \geq 6$; i) $n \geq 8$. 10. d) $a = 12$, $r = 0$ sau $a = 13$, $r = 1$ sau $a = 14$, $r = 2$ sau $a = 15$, $r = 3$; e) $a = 42$, $r = 0$ sau $a = 43$, $r = 1$. 11. Câte 8 transporturi în fiecare caz. 12. $600 : 24 = 25$ de zile; $1512 : 24 = 63$ de zile. 13. $60 : 4 = 15$ lădițe. 14. $480 : 5 = 96$ borcane; $480 : 8 = 60$ borcane. 15. $3480 : 24 = 145$ de cutii. 16. $40 = 9 \cdot 4 + 4$, fiecare maimuță a primit 4 banane, a rămas cu 4 banane. 17. $283 = 10 \cdot 28 + 3$ etc. 18. $788 = 15 \cdot 52 + 8$ etc. 19. $1362 = 54 \cdot 25 + 12$ etc. 20. a) 6 portocale și 3 mandarine. $24 : 4 + 12 : 4 = 9$; b) $(24 + 12) : 4 = 36 : 4 = 9$. 21. 756. 22. 2; 14; 26; 38. 23. 15; 97. 24. 17; 98. 25. 28. 26. 342, 343, 344, 345, 346, 347. 27. 11, 16, 21, 26, 31, 36. 28. $267 = 13a + 7$ și $a = 20$. 29. $n = 5c + 4$, $c < 6$. Numerele sunt: 4, 9, 14, 19, 24, 29. 30. a) Aplicând teorema împărțirii cu rest avem: $n = 6 \cdot 20 + 0$; $n = 6 \cdot 20 + 1$; $n = 6 \cdot 20 + 2$; $n = 6 \cdot 20 + 3$; $n = 6 \cdot 20 + 4$; $n = 6 \cdot 20 + 5$. Suma este $(6 \cdot 20 + 0) + (6 \cdot 20 + 1) + \dots + (6 \cdot 20 + 5) = 741$. 31. a) cel mai mic număr este $12 \cdot 60 + 0$, iar cel mai mare este egal cu $12 \cdot 60 + 11$, etc. 32. 48 și 15. 33. 25 și 6. 34. 110; 450. 35. 2497 și 498. 36. 832 și 15. 37. $n = 17 \cdot 6r + r$, unde $r < 17$ și $103r > 1000$; $n = 1648$. 38. Fie a și b cele două numere. Avem $a + b = 1997$ și $a = b \cdot c + 998$, de unde rezultă $b(c + 1) = 999$ și, cum $b > 998$, rezultă $b = 999$ și $c = 0$ iar $a = 998$. 39. $a + b = 1809$, $a > b$, $a = 5b + 3 \Rightarrow 6b + 3 = 1809 \Rightarrow b = 301$ și $a = 1508$. 40. 145; 71; 37. 41. 188; 564; 1236. 42. $a - b = 84$; $a + b = 2b + 84$; $2b + 84 = 15 \cdot 84 + 14 \Rightarrow b = 595$ și $a = 679$. 43. 4 și 8. 44. $n = 7c + c$, $c < 7 \Rightarrow n = 8c$. Numerele sunt: 8, 16, 24, 32, 40, 48. 45. $n = 11r$, unde $r < 5$. 46. 4; 9; 14; 19. 47. 2; 8; 14. 48. $a = 7 \cdot 6 + r$, $r < 6$. Numerele sunt: 42, 43, 44, 45, 46 sau 43, 44, 45, 46, 47. 49. $n = 11c + 2c$, $2c < 11 \Rightarrow c \leq 5$. Numerele sunt: 0, 13, 26, 39, 52, 65. 50. $a = 11b + 7$; $100 \leq 11b + 7 \leq 999 \Rightarrow 93 \leq 11b \leq 992 \Rightarrow 9 \leq b \leq 90$. Sunt 81 de numere. 51. 287, 537, 787. 52. Fie n unul din numerele ce are proprietatea din enunț, c câțul și r restul împărțirii respective. Deoarece resturile împărțirii oricărui număr natural la 6 sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5, trebuie să analizăm cele 6 cazuri. 1) $r = 0$. Cum $c < r$, imposibil. 2) $r = 1$. Pentru că $c < r$, rezultă $c = 0$ și $n = 6 \cdot 0 + 1 = 1$. 3) $r = 2$. Deoarece $c < r$ rezultă $c = 0$ sau $c = 1$. Se obține $n = 6 \cdot 0 + 2 = 2$ și respectiv $n = 6 \cdot 1 + 2 = 8$. Celelalte cazuri se analizează similar. 53. Fie a și b cele două numere, $a > b$. Avem $a + b = 25$ și $a = 5 \cdot b + r$, $r < b$, de unde obținem $6b + r = 25$. Constatăm că $b \leq 4$ și $r \leq 3$. Pentru $r = 1$ se obține $b = 4$ și $a = 21$. Pentru celelalte valori posibile ale lui r nu se obțin soluții. 54. a) $n = 17k + 4$, $100 \leq 17k + 4 \leq 999 \Rightarrow 6 \leq k \leq 58$. $k = 58 \Rightarrow n = 990$. $k = 6 \Rightarrow n = 106$. b) $(17 \cdot 6 + 4) + (17 \cdot 7 + 4) + \dots + (17 \cdot 58 + 4) = 17 \cdot (6 + 7 + 8 + \dots + 58) + (4 + 4 + \dots + 4) = 29044$. 55. Fie r câțul împărțirii și a deîmpărțitul. Avem $a = 1997r + 10r$, unde $10r < 1997$. Cel mai mic număr se obține pentru $r = 1$ și cel mai mare pentru $r = 199$. 56. 105; 998. 57. 960. 58. Cărțile cântăreau $270 \text{ g} \cdot 10 = 2700 \text{ g}$. Prin urmare, o monedă va avea $2700 \text{ g} : 45 = 60 \text{ g}$. 59. Ionuț va avea un avans de $32 : 4$ jumătăți de tură, adică 4 ture. 60. Un ciubăr plin are $144 : 2 = 72 \text{ kg}$. Semințele dintr-un ciubăr cântăresc $13 \cdot 5 = 65 \text{ kg}$, deci un ciubăr gol are $72 \text{ kg} - 65 \text{ kg} = 7 \text{ kg}$. 61. Bogdan face $3600 \text{ m} : 2 + 3000 \text{ m} : 2 = 3300 \text{ m}$, în $3300 : 20 = 165 \text{ min}$. Marcel face

$4800 \text{ m} : 2 + 3600 \text{ m} : 2 = 4200 \text{ m}$, în $4200 : 21 = 200 \text{ min}$. Silviu face $3000 \text{ m} : 2 + 4800 \text{ m} : 2 = 3900 \text{ m}$, în $3900 : 26 = 150 \text{ min}$. Deci primul a ajuns Silviu după 2 h și 30 min. 62. Dacă împărțim 350 la 12 vom avea câțul 29 și restul 2. Așa că o să cumpere 30 de pachete cu baloane albe. Cum $270 : 15 = 18$, înseamnă că are nevoie de 18 pachete cu baloane roz. Pentru siguranță va lua 31 de pachete cu baloane albe și 19 cu baloane roz. 63. 9 locuri din 36 înseamnă o pătrime sau un sfert. Adică sunt trei sferturi ocupate. Prin urmare Ioana va face $(18 + 25 + 15 + 22 + x) : 3 = (80 + x) : 3$ iar $x \cdot 2 \cdot 8 = 16$ rotații. 64. Avem următoarea situație $(18 + 25 + 15 + 22 + x) : 3 = (80 + x) : 3$ iar x este un număr între 10 și 20. Pentru că $80 + x$ trebuie să se împartă exact la 3, x poate fi 13 sau 16 sau 19. Prin urmare stolul al 5-lea avea 13 sau 16 sau 19 păsări. 65. Pentru a cădea toate piesele lui Iustin este nevoie de $1800 \cdot 2 \text{ s} = 3600 \text{ s} = 60 \text{ min} = 1 \text{ h}$. Cum Marcel are doar 1200 de piese, el va trebui să le așeze astfel încât căderea uneia să dureze $3600 \text{ s} : 1200 = 3 \text{ s}$.

U. 10. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 1. a) $(500 - 2) + (200 + 3) = (500 + 200) + (3 - 2) = 701$; c) $123 \cdot (25 \cdot 4) = 123 \cdot 100 = 12300$. 2. 175; 1705. 6. $a = 3 \cdot (5 : 1) - 2$; $b = (5 + 1) \cdot 2 + 1$. 7. a) $\{[(1 + 2) : 3 + 4] \cdot 5 + 6\} : 7 + 8$; $9 + 10$; b) 1) $(1 + 2) : 3 = 1$; 2) $[(1 + 2) : 3 + 4] : 5 = 1$; 3) $(1 + 2 + 3 + 4) : 5 + 6 - 7 = 1$; 4) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (6 + 7 - 8 + 9) = 1$. 8. a) 98; b) 165; c) 60; d) 140; e) 3081; f) 3; g) 15; h) 10. 9. a) 0, b) 19970. 10. 532 = $(371 + 693) : 2$. 11. 494830. 12. 758758758. 13. 1. 14. 9. 15. 5940 kg. 16. 2016 lei și 2160 lei. 17. Pentru a străbate tunelul, trenul trebuie să parcurgă 3000 m (lungimea trenului + lungimea tunelului). Se obține că trenul străbate tunelul în 6 minute. 18. a) 29375; 50; 750; 6; b) 2300, 7, 1, 3359. 19. a) 0; b) 7. 20. a) 98765; b) 8. 21. a) 123456; b) 1997. 22. a) $102 \cdot 801 = 81702$; b) $5852 : 308 = 19$; c) $206 \cdot 15 = 3090$. 23. a) 69545; b) 4409; c) 2918. 24. a) 66; b) 22; c) 30; d) 13; e) 115. 25. a) 1760; 119; 141; b) 9681; 1660; 20; c) 270; 2; 2. 26. a) 71; b) 1950; c) 20. 27. a) 63; b) 370; c) 0; d) 77; e) 13; f) 20; 28. a) 6; b) 0; c) 1; d) 64; e) 294; f) 0. 29. a) 30; b) 1148; c) 100; d) 51. 30. a) 479; b) 29; c) 1383; d) 0. 31. a) 20; b) 8; c) 500. 32. a) $20 = 4 \cdot 5 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{11 \text{ factori}} = 4 + 5 +$
 $+ \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{11 \text{ termeni}} = 2 \cdot 10 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{8 \text{ factori}} = 2 + 10 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{8 \text{ termeni}} = 2 + 10 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{39 \text{ termeni}} +$
 $+ 5 + 11 = 55$. 34. Dacă în fiecare zi cel mult doi elevi ar serba ziua de naștere, în școală ar fi cel mult $366 \cdot 2 = 732$ de elevi, etc (principiul cutiei). 38. 24. 39. 46920 lei. 40. 200 lei. 41. 18 zile. 42. 760 lei. 43. 40, 22, 88, 20. 44. a) 94217; 272300; 235478; 390008; b) $m = 142783$; $n = 8$; $x = 3125$; $y = 316$. 45. a) 3000; b) 195; c) 1440. 46. a) 12; b) 2; c) 11; d) 1; e) 5; f) 2; g) 1. 47. a) 488; 1988; 0; b) 6630; 55; 642; c) 57; 72. 48. a) 4; b) 3; c) 72; d) 18; e) 19. 49. a) 40; b) 1; c) 4; d) 1998. 50. 15. 51. 45. 52. 45. 53. Membrul I al egalității de demonstrat se scrie succesiv: $[756 - (2 + x) : (x + 2) - 1] : 377 = (756 - 1 - 1) : 377 = 754 : 377 = 2$.

Test 7 1. 1487. 2. a) 12; b) 86. 3. a) 25; b) 52; c) 6; d) 156. 4. a) 240; b) 240. 5. 60. 6. a) câțul 76, restul 19; b) câțul 40, restul 76. 7. Numerele sunt 25 și 20 iar produsul este 500. 8. a) 2007; b) 46556. 9. $a = 40$, $b = 50$, $c = 60$. 10. Fie a , $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$ patru numere naturale consecutive. Avem $4a + 10 = 17 \cdot 12 + 6$, de unde $4a = 200$, adică $a = 50$. Numerele sunt 51, 52, 53 și 54.

Test 8 1. a) 56; b) 111; 2. a) 405; b) 5; c) 9; d) 2004. 3. 27. 4. 9. 5. a) 1; b) 1448. 6. $5 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 199) = 5 \cdot (199 \cdot 200) : 2 = 99500$. 7. $a = 10b + 9$, unde $b \geq 10$. Deci $a + b = 11b + 9 \geq 11 \cdot 10 + 9 = 119$. 8. $n = 85 \cdot a + 81 = (17 \cdot 5) \cdot a + 81 = 17 \cdot (5a) + 81$, unde $100 \leq a \leq 999$. Deci Restul împărțirii lui n la 17 este 13. 9. a) Avem: Fie $a = 21b + 12$, unde $100 \leq a \leq 999$. Deci $100 \leq 21b + 12 \leq 999$, de unde $88 \leq 21b \leq 987$ și $5 \leq b \leq 47$. Sunt 43 de numere. b) $(21 \cdot 5 + 12) + (21 \cdot 6 + 12) + \dots + (21 \cdot 47 + 12) = 21 \cdot (5 + 6 + \dots + 47) + 12 \cdot 43 = 21 \cdot [(1 + 2 + 3 + \dots + 47) - (1 + 2 + 3 + 4)] + 12 \cdot 43 = 21 \cdot [(47 \cdot 48) : 2 - 10] + 516 = 21 \cdot (1118 - 10) + 516 = 23994$.

I.11. Divizor, multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5. Numere pare și numere impare 1. adevărate: P_1, P_2, P_3, P_5, P_7 și P_8 . 2. false sunt P_7 și P_8 . 5. Divizorii lui 6 sunt: 1, 2, 3 și 6 etc. 6. 2 are ca divizori pe 1 și 2. 7. a) 1, 2, 4. Ce mai mare este 4; b) 1, 2, 5, 10. Cel mai mare este 10; c) 1, 3, 5, 15. Cel mai mare este 15; d) 1; e) 1; f) 1 și 3. Cel mai mare este 3; g) 1 și 13; h) 1, 3; i) 1 și 11; j) 1, 11, 22; k) 1, 2, 3, 6; l) 1, 2, 7, 14. 8. 16, 24, 32, 40, 48. 9. $100 = 4 \cdot 25$. 10. 24, 48, 72, 96, 120. 11. 60. 12. $a + b + c = (1 + 3 + 5 + \dots + 111) + 10 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 111) + 100 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 111) = 111 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 111)$. 13. $xyzxyz = xyz \cdot 1000 + xyz = xyz \cdot (1000 + 1) = xyz \cdot 1001 = xyz \cdot 11 \cdot 91$. 14. a) 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75 etc. 16. a) 1010, 520, 720, 10, 130, 40, 2000, 12130, 540, 300000 etc. 17. a) 320, 1400, 3700, 11200, 7000. 18. a) 403030; 452535; b) 402030. 19. 5 și 22; 15 și 12; 25 și 2. 20. a) 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74; b) 60; 65; 70; c) 60, 70. 21. 200; 222; 244; 266; 288. 22. $y = 0$ sau $y = 5$. $0 \leq x \leq 9$. 23. $17xyy:10$ dacă $y = 0$. Deci avem numerele de forma $17x00$ unde $1 \leq x \leq 9$. 24. b) 400, 410, 420, ..., 490. 25. a) 340; b) 340, 342, 344, 346, 348; c) 340; 345. 26. a) 1230, 1232, 1234, 1236, 1238; b) 1230, 1235; c) 1230. 27. a) 2342; 4344, 6346, 8348; b) 5345; c) nu există. 28. a) 2222, 4424, 6626, 8828; b) 5525; c) nu există. 29. a) 42030, 42232, 42434, 42636, 42838; b) 42030; 42535; c) 42030. 30. a) 50; b) 20; c) 10. 31. a) 45; b) 18; c) 9. 32. a) 450; b) 180; c) 90. 33. resturile împărțirii a 5 numere naturale consecutive la 5 sunt 0, 1, 2, 3, 4 deci unul din ele este divizibil cu 5 etc. 34. Un factor al produsului este par. 35. 3000, 3024, 3048, 3072, 3096. 36. 21150, 21450, 21750. 37. a) 3142, 3340; b) 3048; 3246; 3444; 3642; 3840; c) 3348; 3546; 3744; 3942. 38. a) 1270; 1225; b) 1265; c) 1275. 39. a) 118; 226; 334; 442; 550; b) 448; 556; 664; 772; 880; c) nu există. 40. a) 900; b) 955; c) nu există. 42. par. 43. 8, 10, 12, 14, 16, 18. 44. 5, 7, 9, 11. 45. 84, 86, 88, 90, 92. 46. 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23. 47. 1772, 1774, 1776, 1778, 1780. 48. a) Există numere naturale pare, divizibile cu 4 și există numere naturale pare care nu sunt divizibile cu 4 (de exemplu: 6, 10, 102, etc). Deci nu orice număr par este divizibil cu 4. Propoziția este falsă. b) Pentru $n = 1$, avem $6 \cdot 1 - 1 = 5$ care se divide numai cu 1 și cu el însuși. Dacă $n = 2$, atunci $6 \cdot 2 - 1 = 11$ care se divide numai cu 1 și cu 11. Dacă $n = 3$, atunci $6 \cdot 3 - 1 = 17$ care se divide numai cu 1 și cu 17. Dacă $n = 4$, atunci $6 \cdot 4 - 1 = 23$ care se divide numai cu 1 și cu 23. Dacă $n = 5$, atunci $6 \cdot 5 - 1 = 29$ care se divide numai cu 1 și cu 29. Dacă $n = 6$, atunci $6 \cdot 6 - 1 = 35$ care mai are ca divizori pe lângă 1 și 35 pe 5 și 7. Deci propoziția este falsă. c) Analizând ca la exercițiul b) pentru $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ și $n = 4$ se obțin numere divizibile numai cu 1 și cu el însuși, dar pentru $n = 5$ se obține $5^2 - 5 + 1 = 21$ care are și divizorii 3 și 7. Propoziția este falsă. d) $n^2 + n + 4 = n(n + 1) + 4 =$ număr par mai mare sau egal cu 4. Propoziția este adevărată. 49. Pentru numărul de buchete Andrei are nevoie de cel mai mare divizor comun al numerelor 24, 16, 40 și 56. Acesta este 8. Prin urmare știind că $24 = 8 \cdot 3, 16 = 8 \cdot 2, 40 = 8 \cdot 5$ iar $56 = 8 \cdot 7$, vor fi 8 buchete și fiecare are: 3 baloane albe, 2 baloane roșii, 5 baloane albastre și 7 baloane galbene. 50. În luna mai avem $31 \cdot 24 \text{ h} = 744 \text{ h}$. Vântul nu a bătuț timp de 10 h în prima perioadă și 22 h în a doua, adică 32 de ore. Deci moara a funcționat $744 \text{ h} - 32 \text{ h} = 712 \text{ h}$. Cum 712 nu este divizibil cu 24, procedăm altfel. Dacă în 24 ore macină 15 saci, înseamnă că în 8 ore macină câte 5 saci. Prin urmare va măcina $(712 : 8) \cdot 5 = 89 \cdot 5 = 445$ saci. 51. Cum trebuie să depoziteze într-un dulap, același fel de produse și ordonat, greierele trebuie să aibă grijă ca numărul de boabe să fie multiplu al numărului de compartimente din dulap. Este mai ușor dacă întocmim un tabel.

Test 9 1. 2030, 2232, 2434, 2636, 2830. 2. 430, 435. 3. 20, 25, 30, 35, 40. 4. 222, 424, 626, 828. 5. 1811, 1833, 1855, 1877, 1899. 6. 1023. 7. 1, 3, 7, 21. 8. 0, 12, 24, 36, 48. 9. 9. 10. 805, 810, 815, 820, 825, 830, 835, 840, 845, 850, 860, 865, 870, 875, 880, 885, 890, 895. 11. 109. 12. $(a, b) \in \{(0, 0), (2, 2)\}$.

I.12. Media aritmetică a două numere naturale 1. a) 2; b) 5; c) 8; d) 55; e) 454; f) 5740; g) $2^{55} \cdot 9$; h) 30; i) 65; j) 189; k) 65. 2. a) 9 sau 10; b) Nu: $10 \cdot 2 - 8 > 10$. 3. Mediile sunt egale cu 33. 4. $300 \cdot 2 - 236 = 364$. 5. $64 + a = 42 \cdot 2$; $a = 20$. 6. a) 64; b) 59; c) 63; d) 4011; e) 84; f) 558. 7. $m_a = (60 + 56) : 2 = 58 \text{ km/h}$. 8. $1472 : 2 = 736$. 9. 120 și 480. 10. Fie a, b, c numerele căutate. Avem $a + b = 13 \cdot 2 = 26$; $a + c = 2 \cdot 14 = 28$ și $b + c = 2 \cdot 16 = 32$ de unde $a + b + c = (26 + 28 + 32) : 2 = 43$ și $a = 43 - 32 = 11$; $b = 43 - 28 = 15$ și $c = 43 - 26 = 17$; b) 9, 21 și 29. 11. Vezi piramida alăturată. 12. $m \cdot 2$ este număr par, deci este suma a două numere naturale de aceeași paritate. 13. $(a + b) : 2 = m$; $a + b = 2m$; de unde $a + b - m = m - a$. Deci, $b - m = m - a$.

108			
72		144	
48	96	192	
32	64	128	256

Test 10 1. a) 4; b) 18; c) 1190; d) 33. 2. $2012 : 2 = 1006$. 3. $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Numerele sunt 2 și 6 care au media aritmetică 4. 4. 248. 5. n este impar. 6. 50 și 150. 7. Numerele sunt: 1, 9 și 15.

I.13. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor naturale. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și al inecuațiilor și probleme de organizare a datelor 1. a) 54; b) 99; c) 59; d) 0; e) 19; f) 45 000; g) 31; h) 22; i) 54; j) 9; k) 805; l) 94; m) 1103; n) 13; o) 17; p) 46. 2. a) 2; b) $\emptyset$; c) $\emptyset$; d) 1; e) 0; f) 5; g) 1. 3. a) 90; b) 120; c) 373. 4. a) 53; b) 40; c) 353; d) 1. 5. a) 20; b) $\emptyset$; c) 8; d) 3; e) 1997; f) 5 260. 6. a) 2; b) 0; c) 7; d) 6; e) 4; f) 1. 7. a) 5; b) 50; c) 6. 8. a) 0; b) 1; c) 3; d) 3; e) 6. 9. a) 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18; b) 8, 9. 10. a) 1, 2, 3; b) 1, 2, 3, 4; c) 1; d) 1, 2, 3, 4, 5, ..., 88. 11. a) 0, 1, 2, 3, 4; b) 0, 1, 2, 3, 4, 5; c) 0, 1, 2, 3; b) 1, 2, 3; b) 1, 2, 3, ..., 8; c) 25, ..., 34; d) 7, 8, ..., 13; e) 269, 270, ..., 280. 13. a) 2, 3, 4, 5, 6; b) 8, 9. 14. a) $0 \leq x \leq 9$; c) 25, ..., 34; d) 7, 8, ..., 13; e) 269, 270, ..., 280. 15. Fie d deîmpărțitul și c câțul. Avem relația $100 < 5 \cdot c + 4 < 200$, b) $0 \leq x \leq 6$; c) $0 \leq x \leq 6$; d) $2 \leq x \leq 6$. 16. $a = 12 \cdot c + 7 \leq 99$, $c = 7$ și $a = 91$. 17. 45. De ce? de unde $20 \leq c \leq 39$ și $104 \leq d \leq 199$. 18. a) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; b) $x \in \{0, 1\}$; c) $x \in \{1, 2\}$; d) $x \in \mathbb{N}$. 19. $x = 9$. Câțul poate fi zero? 20. $2x + 4x + \dots + 3994x = 1997 \cdot 1998 \Rightarrow 2(1 + 2 + \dots + 1997)x = 1997 \cdot 1998 \Rightarrow [2 \cdot (1997 \cdot 1998) : 2] \cdot x = 1997 \cdot 1998 \Rightarrow x = 1$. 21. Ecuația din enunț are aceeași soluție (este echivalentă) cu ecuațiile: $(2x - x) + (4x - 3x) + \dots + (100x - 99x) + 102 = 101x \Leftrightarrow 50x + 102 = 101x \Leftrightarrow x = 2$. 22. $x = 1$. 23. a) 4; b) 5; c) 16. 24. a) 460; b) 830. 25. a) 137;

b) 32; c) 55. 26.

Ora	5	7	10	12	14	17	19	21
Temperatura	3	4	8	12	14	10	8	6

27.

Anul	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Producția de porumb (în vagoane)	20	30	40	60	50	40	70

28. 1 536. 29. 143 lei, 33 lei, 275 lei. 30. 1 500 lei. 31. 66 m. 32. 20 de combine. 33. 4 470 lei. 34. 560 km. 35. 330 km. 36. 5 250 kg. 37. 48 zile. 38. Pentru terminarea lucrării sunt necesare $10 \cdot 30 = 300$ norme. Muncitorii rămași vor termina lucrarea în $300 : 6 = 50$ de zile. 39. Debitul unui robinet este de $2400 : (4 \cdot 6) = 100 \text{ l}$ apă pe oră. Într-o oră, prin 5 robinete curg 500 l apă, iar 25 hl de apă vor curge în $2500 : 500 = 5$ ore. 40. $148 \cdot \frac{a}{a} = 148$, a este numărul al doilea, iar $a + 18$ este primul număr. $2 \cdot a + 18 = 148$; $a = 65$. 41. 32; 69. 43. 862 vaci; 812 capre; 942 porci; 1 884 oi. 44. 108 găini; 182 găște, 228 rațe. 45. 669; 670; 671. 46. $2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) + (2n + 8) = 40 \Rightarrow 10n + 20 = 40 \Rightarrow n = 2$ etc. 47. 900 și 1101. 48. 75. 49. 20. 50. 70 lei și 350 lei. 51. 1935 și 2385. 52. 900 și 300. 53. 140 și 50. 54. 24. 55. 532 și 36. 56. 145 și 21. 57. 1997. 58. Fie x numărul cel mic. Numărul cel mare este $95 + x$. Avem $95 + x = 11x + 5$, de unde $x = 9$. 59. $n = 48c + c^2$, unde $c^2 < 48$. 60. Fie x deîmpărțitul și q câțul. Avem $x = 69q + q^3$, $q^3 < 69$. Cum q este număr natural nenul,

rezultă $q \in \{1, 2, 3, 4\}$, deci $x \in \{70, 146, 234, 340\}$. 61. 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. 62. Ecuația problemei: $10 + x + 8 + x + 6 + x = 40 + x \Leftrightarrow x = 8$. Rezolvați și prin metoda grafică. 63. Fie x al treilea număr. Al doilea număr este $3x + 8$ și primul număr este $2(3x + 8) + 14 = 6x + 30$. Se obține $x = 9$. Rezolvați și grafic problema. 64. Fie x numărul elevilor din prima clasă. În cealaltă clasă sunt $54 - x$ elevi. Se obține ecuația $x - 2 = 56 - x + 2$ care are soluția 30. Problema se poate rezolva și prin metoda falsei ipoteze. 65. Fie x numărul rațelor. Se obține ecuația $3 \cdot (x + 3) = 5x - 5$ care are soluția 7. Rezolvați și grafic problema. 66. Fie x lungimea unei bucăți. Se obține ecuația $x - 4 = 3(x - 22)$, care are soluția 31. Rezolvați și grafic problema. 67. Dacă x este numărul căsuțelor cu două camere se obține ecuația $2x + 3(36 - x) = 101$, care are soluția 7. Rezolvați și prin metoda falsei ipoteze. 68. Fie x numărul băncilor. Numărul elevilor este $2x + 1$ sau $3(x - 4) + 1$. Se obține $x = 12$. 69. Soluția 1: Presupunem că toate răspunsurile sunt corecte. În acest caz elevul ar obține 250 puncte, deci au fost și răspunsuri greșite și el a primit în plus 120 puncte. Numărul răspunsurilor greșite este $120 : (25 + 15) = 3$. Soluția 2: Fie x numărul soluțiilor corecte. Se obține ecuația $25x - 15(10 - x) = 130$, care are soluția 7. 70. $5^y \leq 134 \Rightarrow y \in \{0, 1, 2, 3\}$. Se obține $x = 2, y = 3$. 71. Din $4^x \leq 59; 3^y \leq 59; 2^z \leq 59$ rezultă: $x \in \{0, 1, 2\}; y \in \{0, 1, 2, 3\}$ și $z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Se obține: $x = 2, y = 3, z = 4$. 72. $U(x^2 + x) \in \{0, 2, 6\}$ și $U(5y) \in \{0, 5\}$ implică $U(x^2 + x + 5y) \in \{0, 1, 2, 5, 6, 7\}$. Dar $U(1998) = 8$ și, prin urmare, ecuația nu are soluție. 73. a) $3^4 - 1; 3^4 + 1$; b) $5^6 - 2; 5^6 - 1; 5^6 + 1; 5^6 + 2$; c) $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) + (x + 7) = 7^{1997} \Rightarrow x = 7^{1996} - 4$. Numerele sunt: $7^{1996} - 3, 7^{1996} - 2, 7^{1996} - 1, 7^{1996}, 7^{1996} + 1, 7^{1996} + 2, 7^{1996} + 3$. 74. Calculăm numărul de săptămâni din perioada precizată: $(31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 2) : 7 = 245 : 7 = 35$. Deci Smaranda va avea $312 + 35 \cdot 15 = 837$ timbre, iar Emma $408 + 35 \cdot 9 = 723$ timbre. Este posibil, dacă notând cu x numărul de săptămâni, următoarea ecuație are soluție număr natural: $312 + x \cdot 15 = 408 + x \cdot 9$. Membrul întâi este numărul de timbre pe care-l poate avea Smaranda după x săptămâni, iar membrul al doilea este numărul de timbre pe care-l poate avea Emma după x săptămâni. Găsim soluție 16. Deci este posibil și vor avea același număr de timbre după 16 săptămâni.

Test 11 1. a) 112; b) 50; c) 440; d) 125; e) 18; f) 13; g) 420; h) 36. 2. Este soluție pentru a), c), d). 3. a) $x < 5$; b) $x < 3$; c) nu există; d) $2 \leq x \leq 8$. 4. 83. 5. $x = 4; y = 8; x = 5, y = 2; x = 6, y = 0$. 6. 185 și 13.

I.14. Numere naturale. Recapitulare pentru lucrarea scrisă. 1. a) 80; b) 13. 2. 675984. 4. $AB = 2$ cm, $AC = 5$ cm, $AF = 14$ cm, $BD = 6$ cm, $BE = 9$ cm, $DF = 6$ cm. 5. a) 100; b) 1090; c) 257. 6. a) 481; b) 333822. 7. 1, 2, 3, 4, 7 și 1, 2, 3, 5, 6. 8. Dacă toți termenii sumei ar fi cel mult egali cu 60, cum suma primelor 60 de numere naturale nenule este egală cu 1830, rezultă că există cel puțin un termen mai mare decât 60. 9. 0. 10. 7. 11. a) 2; b) 31 și 51. 12. $a = 35; b = 45; c = 55$. 13. 10. 14. a) 265000 lei; b) 3800000 lei. 15. 9; 12; 21. 16. 447 și 136. 17. 0 sau 1. 18. 2978. 19. 11814. 20. 244 și 15. 21. 4851. 22. 997. 23. 1009. 24. 22365. 25. a) 0; b) 262 și 250. 26. 620. 27. 20, 21, 22, 23, 24. 28. a) 502; b) 1053. 29. $(100 \cdot 5 + 0) + (100 \cdot 5 + 1) + (100 \cdot 5 + 2) + (100 \cdot 5 + 3) + (100 \cdot 5 + 4) = 2510$. 30. 83 și 20. 31. 232 de pagini. 32. $a \cdot b = 30$. $(a, b) \in \{(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6), (6, 5), (10, 3), (15, 2), (30, 1)\}$. 33. $a - b = 865$. $a = 8b + 25, b > 25$ etc. $a = 985$ și $b = 120$. 34. $abc = 15q + 7; 15q + 7 \geq 100; q = 7 (q \in \mathbb{N})$. Numărul căutat este 112. 35. a) $n = 2001 \cdot c + 5c = 2006 \cdot c$. Soluția se obține pentru $c = 1$. b) 10006. 36. $abc = 27k + 5, 100 \leq 27k + 5 \leq 999 \Rightarrow 4 \leq k \leq 36$ etc. 37. $a = bc + r, r < b, a - r = bc = 6 \Rightarrow b = 1, c = 6$ sau $b = 2, c = 3$ sau $b = 3, c = 2$ sau $b = 6, c = 1$. Dacă

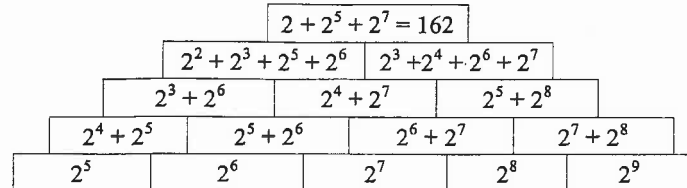
$b = 1, c = 6$, atunci $r = 0$ și $a = 6$. Dacă $b = 2, c = 3$, atunci $r = 0$ sau $r = 1$. Se obține $a = 6$ și, respectiv $a = 7$. Dacă $b = 3, c = 2$, atunci $r = 0$ sau $r = 1$ sau $r = 2$ etc. 38. a) 110, rest 11; b) 793, rest 48; c) 269, rest 11. 39. 486. 40. 177 și 15. 41. 79 de numere; 434895. 42. 5 și 5; 3 și 5. 43. a) 1997; b) 1997; c) 810. 44. a) 15; b) 1; c) 108; d) 75^2 ; e) 0. 45. a) 3^2 ; b) 3^4 ; c) 3^0 ; d) 3^{22} ; e) 3^{15} . 46. a) 18; b) 15; c) 124; d) 0; e) 150. 47. a) $32 - 27 = 5$; b) $7 + 1 + 1 = 9$; c) $200 : 10 = 20$; d) $25 : 5 = 5$; e) $49 + 1 = 50$; f) $8 + 2 \cdot 1 = 10$. 48. a) da; 5^5 ; b) da; 100. 49. a) 5; b) 7; c) 5^3 ; d) 417; e) 201. 50. a) $5^{71} > 3^{71}$; b) $8^{20} = 4^{30}$; c) $27^{13} < 9^{20}$; d) $125^2 > 5^4$; e) $1000^{12} > (10^2)^{15}$. 51. a) $(9^{10})^2$; b) $(3^{11})^2$; c) $(8^3)^2$; d) $(10^{41})^2$; e) $(53^5)^2$. 52. a) $1 + 0 + 107 = 108$; b) $2809 - 9 = 2800$; c) $25 + 3 \cdot 1 = 28$; d) $49 + 3^{16} : 3^{16} = 50$; e) $7^{15} : 7^{13} = 7^2 = 49$; f) $2^9 : 2^8 = 2$; g) $10^{10} : 10^7 = 10^3 = 1000$; h) $6^{78} : 6^{75} = 6^3 = 216$. 53. a) $x = 2^2$; b) $x + 7 = 15 \Rightarrow x = 8$; c) $2x + 12 = 22 \Rightarrow x = 5$; d) $15 + 12 = 3x \Rightarrow x = 9$; e) $x = 7 + 4 = 11$; f) $3x = 12 + 12 \Rightarrow x = 8$; g) $2x = 3 + 7 \Rightarrow x = 5$; h) $x = 48 - 15 \Rightarrow x = 33$. 54. a) 17 zerouri; b) 69; c) 5; d) $(2^{20} \cdot 5^{20}) \cdot 2^3$; 20 zerouri; e) $2^{135} \cdot 3^{115} \cdot 5^{115}$; 115 zerouri; f) $2^{72} \cdot 5^{40}$; 40 zerouri; g) $9^n \cdot 5^n \cdot 2^{n+1}$; n zerouri; h) $2^{3n+3} \cdot 5^{3n-1}$; $3n - 1$ zerouri. 55. a) $(100 - 36) : 8 = 8$; b) $1 + 2 \cdot (9 \cdot 1 + 1) = 21$; c) $3^{50} : 3^{48} + (6 + 210) : 36 = 9 + 6 = 15$; d) $(7 + 3) : 5 = 2$; e) $(3^9 - 3^8) \cdot 513^{23} = 0$. 56. a) $a = b^2 \Rightarrow a \in \{1; 4; 9\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{11; 42; 93\}$; b) $a = k^3 \Rightarrow a \in \{1; 8\}$; $b : 3 \in \mathbb{N} \Rightarrow b \in \{3; 6; 9\}$ } $\Rightarrow \overline{ab} \in \{13; 16; 19; 83; 86; 89\}$; c) $\overline{ab} + 1 = k^2 \Rightarrow \overline{ab} \in \{15; 24; 35; 48; 63; 80\}$; d) $\overline{ab} + \overline{ba} = k^2 \Rightarrow 11 \cdot (a + b) = k^2 \Rightarrow a + b = 11$; $\overline{ab} \in \{92; 83; 74; 65; 56; 47; 38; 29\}$; e) $\overline{ba} = k^3 \Rightarrow \overline{ba} \in \{27; 64\}$; $\overline{ab} \in \{72; 46\}$. 57. (25; 36; 49). 58. $u(N) = 7$. 59. 49. 60. 64. 61. a) $>$; b) $=$; c) $<$; d) $>$; e) $<$; f) $<$. 62. a) $4 + 5 \cdot 2 = 14$; b) $(36 + 64) : 25 = 4$; c) $(3^8 + 2 \cdot 3^8) : 3^8 = 3^9 : 3^8 = 3$; d) $101 - 4 \cdot 25 = 1$. 63. $u(N) = 3 \Rightarrow$ restul este 3. 64. a) $x = 6$; b) $x = 6$; c) $5^{6x} \leq 5^{36} \Rightarrow x = 6$. 65. $2^{2010} : 2^{2000} = 2^{10} = 1024$. 66. a) 998; b) 3. 67. a) 6; b) 4; c) 1; d) 5; e) 256; f) 3. 68. 1. a) 1; b) 2; c) 24; d) 10. 2. 15. 70. a) 4; b) 9; c) 5; d) 1; e) 128; f) 11; g) 5; h) 0; i) 5; j) 394; k) 1; l) 0; m) 141. 71. $a < b$ (A). 72. $a < c < d < b$ (A); celelalte propoziții sunt false. 73. Suma primelor 13 numere naturale impare este egală cu: $1 + 3 + 5 + \dots + 25 = (1 + 2 + 3 + \dots + 25) - (2 + 4 + \dots + 24) = (25 \cdot 26) : 2 - 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 12) = 25 \cdot 13 - 2 \cdot (12 \cdot 13) : 2 = 13^2 = 169$. deci nu pot fi distincte două câte două. 74. $(1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (51 + 50) = 101 + 101 + \dots + 101 = 101 \cdot 50 = 5050$. 75. 51; 62; 73; 84; 95. 76. Nu există. 77. 100. 78. 11.

79. $\underbrace{9000 \dots 000}_{50 \text{ zerouri}}$. 80. $n = 54, m = 0$ etc. 81. 24 lei. 82. $x \in \{2, 7, 12, 17\}$. 83. $U(N) = 5$.

84. $U(N) = 7$. 85. 13, 15, 17, 19. 86. a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 sau 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10; b) 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. 87. a) 2; b) 2; c) 6; d) 10. 88. $7^8, 7^4 + 9 \cdot 7^5, 7^n + 9 \cdot 7^{n+1}$ dacă n este par. 89. a) 4; b) 4; c) $n \in \{0, 1, 2\}$; d) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; e) $n \in \mathbb{N}^*$; f) $n = 0$. 90. a) 0; b) 48136; c) 13. 91. a) 442; b) 1446; c) 6; d) 2; e) 2. 92. 49. 93. a) $(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + (10000 - 1) = 11110 - 4 = 11106$; b) 56531; c) 772; d) 102. 94. 40. 95. a) 4442; b) 43382; c) 201; d) 3. 96. 6. 97. 4. 98. a) A are 11 cifre și B are $n + 1$ cifre. b) A are prima cifră 4 și ultima cifră 5, iar B are prima cifră 6 și ultima cifră 3. c) A conține 9 cifre de 9, iar B conține $(n - 1)$ cifre de 9. 99. 6. 100. 995. 101. 2002. 102. 2; 16; 64. 103. 12 creioane. 104. 1, 2, 3 și 4. 105. 19. 106. 15. 107. 36. 108. $a = 3; b = 5; c = 7$. 109. În fiecare cutie sunt cel puțin 5 bile. Dacă fiecare cutie ar conține un număr diferit de bile, atunci numărul total de bile ar fi cel puțin $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 68$, contradicție! Deci există cel puțin două cutii cu același număr de bile (principiul cutiei). 110. a) În tur fiecare echipă joacă 17 meciuri, iar în retur tot 17 meciuri. Răspuns: 34. b) $34 \cdot 9 = 306$ meciuri.

c) Dacă notăm cu a numărul victoriilor și cu b numărul egalurilor, atunci avem: $a + b \leq 10$, $a > b$ și $3a + b = 20$. Se obține $3a = 20 - b$, de unde $3/20 - b$ și $b \in \{2; 5; 8\}$. Pentru $b = 2$ se obține $a = 6$, singura soluție. d) $7 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 24$ de puncte. 111. a) 37. b) 27.

112.



113.

43 45 47 49 51 53 55 $7^3 = 343$
57 59 61 63 65 67 69 71 $8^3 = 512$.

114. Observăm că pentru $a = 4$ și $b = 2$ se obține $4^2 - 2^4 = 0$, deci produsul este 0.

115. $(134 + 143) - 179 = 98$ de unități. 116. 9^{9^9} . 117. $2^{10} = 1024$, are 4 cifre și $2^{20} = 1024^2$. Avem $10^6 < 1024^2 < 2000^2 = 8 \cdot 10^6$, deci 2^{20} are 7 cifre. 118. Numerele sunt 1, 2 și 4, deci 3 numere.

119. Presupunem că nu există două cutii care conțin același număr de bile. Deoarece fiecare cutie conține bile de toate culorile, rezultă că în fiecare cutie se află cel puțin 4 bile, ceea ce, împreună cu presupunerea făcută, conduce la concluzia că în cele 10 cutii, numărul minim de bile este, respectiv: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 (nu obligatoriu în această ordine). În această ipoteză numărul total de bile din cele 10 cutii este cel puțin $4 + 5 + 6 + \dots + 12 + 13 = 85$, ceea ce contrazice enunțul problemei. Prin urmare, presupunerea făcută a condus la o contradicție etc.

120. Presupunem că ar exista un număr natural n cu proprietatea dată. Conform teoremei împărțirii cu rest avem relația: $n = 21a + 7 = 35b + 3$, de unde rezultă că $M_7 = M_7 + 3$, contradicție!

121. $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = (10 \cdot 11) : 2 = 55$. Deci 54 nu pot fi puse. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 = 56$. Răspunsul este afirmativ. 122. $n + 1 = 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012} = 2^3 + 2^3 + \dots + 2^{2012} = 2^{2012} + 2^{2012} = 2^{2013}$. Deci $n = 2^{2013} - 1$.

$U(2^{2013}) = U(2^{4 \cdot 503 + 1}) = U(2^1) = 2$ și $U(n) = 0$, deci $10/n$. 123. Sunt 20 de dromaderi.

124. $15 + 2 \cdot 3 = 21$ ani. 125. $60 \cdot 10 - 600 : 8 = 525$ de baloane. 126. $3 \cdot (x - 30) = x$, de unde $x = 45$.

127. Observăm că un perete al lăzii are un metru pătrat. La o ladă trebuie să vopsească 4 pereți laterali, fundul lăzii și capacul pe ambele părți, adică 7 metri pătrați. Deci pentru cele 4 lăzi vor fi 28 metri pătrați. Este nevoie de $28 : 4 = 7$ kg de vopsea, pentru care trebuie plătit $7 \cdot 26$ lei = 182 lei.

I.15. Variante pentru teza pe semestrul I

Test 12 1. 121. 2. 343. 3. 898. 4. 9995. 5. a) 190, 192, 194, 196, 198; b) 190. 6. 1200; 9288.

7. a) 49; b) 1; c) 1; d) 141. 8. a) $1^7 = 132^0$; b) $4^{35} < 4^{53}$; c) $9^{100} = 3^{200} > 3^{180} = 27^{60}$; d) $3^{303} > 4^{202}$.

Test 13 1. a) 9876; b) 9875; c) 9870. 2. 2. 3. 4384. 4. a) 72; b) 351; c) 1998. 5. a) 1, 2, 3, 4; b) 1, 2, 3, 4, 5. 6. 7. $x < y$. 8. Mihai are 110 timbre, Ioana 145 și Andrei 105 timbre.

Test 14 1. D. 2. B. 3. D. 4. A. 5. B. 6. D. 7. C. 8. D. 9. C. 10. B. 11. A. 12. C.

Test 15 1. a) 858; b) 5. 2. a) 10340, 12342, 14344, 16346, 18348; b) 15345, 10340; c) 10340. 3. 18 lei. 4. a) 140; b) 3; c) 3. 5. a) 10; b) 0. 6. a) $2003^0 > 0^{2003}$; b) $5^{300} = 25^{150}$; c) $3^{20} > 2^{30}$. 7. 19, 20, 21, 22, 23. 8. 215. 9. $a = 8 = 2^3$; $b = 2004^2$.

Test 16 1. a) 140, 142, 144, 146, 148; b) 140, 145; c) 140. 2. a) 9; b) 0, 1, 2, 3, 4, 5; c) 5. 3. $5^3 - 5^2 = 100$. 4. 0, 7, 14, 21, 28, 35. 6. a) 1; b) 3. 7. $2^{2004} + 2^{2004} = 2^{2005}$. 8. a) 10; b) nu are soluție. 9. 61 și 43.

Test 17 1. a) 12; b) 0; c) 51; d) 483. 2. a) 917; b) 12; c) 3; d) 3. 3. Jumătate din încărcătura camionului cântărește $6370\text{kg} - 4220\text{kg} = 2150\text{kg}$. Deci încărcătura întreagă cântărește $2150\text{kg} \cdot 2 = 4300\text{kg}$, iar camionul gol cântărește $6370\text{kg} - 4300\text{kg} = 2070\text{kg}$. 4. 1, 2, 3, 6 și 12. 5. Dacă notăm numărul apartamentelor cu două camere cu x , atunci numărul apartamentele cu 4 camere îl exprimăm prin $42 - x$ și obținem ecuația: $2x + 4(42 - x) = 130$ care are soluția 19. Deci în bloc sunt 19 apartamente cu două camere și $42 - 19 = 23$ de apartamente cu patru camere. 6. 21, 22 și 23 sau 15, 16, 17, 18. 7. $50 \leq x^2 - 3 \leq 100$ implică $53 \leq x^2 \leq 103$. Deci x ia valorile 8 și 9.

CAPITOLUL II. MULȚIMI. II. 1. Propoziții adevărate și propoziții false. „Cel mult“, „cel puțin“, „sau“, „și“, „nu“, „dacă-atunci“

1. Următoarele enunțuri sunt propoziții: p_1, p_2, p_3, p_5 și p_7 . 2. p_1, p_2, p_4, p_7 sunt propoziții. 3. Sunt propoziții: $p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_{11}, p_{12}$. Sunt adevărate: p_3, p_6, p_{11} și p_{12} . 4. Sunt adevărate propozițiile: p_1, p_3, p_4, p_6 . 5. a) 47; b) 7; c) 22; d) 25; e) 3; f) 4. 6. a) 4; b) $a = 5$; c) 8, 9; d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. e) 1, 2, 3; f) 8. 7. Sunt adevărate: p_1, p_3, p_5, p_6 . 8. a) 4; b) $a = 5$; c) 8, 9; d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. e) 1, 2, 3; f) 8. 9. p_1 (A); p_2 (F); p_3 (F); p_4 (A); p_5 (A). 10. p_1 (A); p_2 (A); p_3 (A); p_4 (A); p_5 (A); p_6 (A); p_7 (F). 11. non p_1 : „există numere naturale mai mari decât 100 care nu se divid cu 5“; non p_2 : „ $5 \geq 9$ “; non p_3 : „ $17 - 3 < 40$ “; non p_4 : „ $2^{33} \leq 3^{22}$ “; non p_5 : „Orice număr întreg negativ este mai mic decât 10“; p_6 : „ $8 \cdot 10 \leq 8 + 10$ “; p_7 : „21 este număr impar“; p_8 : „ 25^{2004} nu are ultima cifră 5“; p_9 : „2004 nu este divizibil cu 5“; 12. non p_1 : „ $x \geq y$ “; non p_2 : „ $x > y$ “; non p_3 : „ $x \leq y$ “; non p_4 : „ $x < y$ “. 13. a) non p_1 : „Numerele 64, 65, 66 nu sunt consecutive“; non p_2 : „75 nu este succesorul lui 76“; non p_3 : „ x nu este diferit de $2x$, oricare ar fi x număr natural“; non p_4 : „nu există nici un număr natural cu proprietatea $x^2 = x + 6$ “; b) p_1 (F); p_2 (A); p_3 (A); p_4 (F). 15. Sunt adevărate: $p_1, p_2, p_7, p_8, p_{11}$, celelalte fiind false. 16. a) „Numerele naturale care au ultima cifră pară sunt divizibile cu 2 sau numerele naturale care au ultima cifră 5 sunt divizibile cu 5“; b) „Numerele naturale care au ultima cifră pară sunt divizibile cu 2 și numerele naturale care au ultima cifră 5 sunt divizibile cu 5“; c) „Dacă numerele naturale care au ultima cifră pară sunt divizibile cu 2, atunci numerele naturale care au ultima cifră 5 sunt divizibile cu 5“; d) „Dacă numerele naturale care au ultima cifră 5 sunt divizibile cu 5, atunci numerele naturale care au ultima cifră pară sunt divizibile cu 2“; e) „Numerele naturale care nu au ultima cifră pară sunt divizibile cu 2“; f) „Numerele naturale care nu au ultima cifră 5, nu sunt divizibile cu 5“.

18. a)	Strungar	Croitor	Lăcătuș		Strungar	Croitor	Lăcătuș
Strungaru	-	-	Da	sau	Strungaru	-	Da
Croitoru	Da	-	-		Croitoru	-	Da
Lăcătușu	-	Da	-		Lăcătușu	Da	-

b) Lăcătușu să nu fie strungar sau Strungaru să nu fie croitor.

19. Urmărește tabelul:

	I	II	III	IV	V
Victor	-	-	-	Da	-
Gabriel	-	-	Da	-	-
Vasilică	-	-	-	-	Da
Ionuț	Da	-	-	-	-
Gigel	-	Da	-	-	-

II.2. Mulțimi; descriere și notatii; element, relația dintre element și mulțime (relația de apartenență). Exemple de mulțimi finite; exemple de mulțimi infinite. Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$

1. a) 0, 1, 2, ..., 8; b) 85, 86, 87, ..., 99. 3. $\{m; a; t; e; i; c; \bar{a}\}$; $\{a; p; r; t; m; e; n\}$; $\{a; p; o; m; e; t; r; u\}$; $\{a; e; r; i; s\}$; $\{a; r; l; i; p; e; d\}$. 4. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $\{1, 2, 3, 4\}$; c) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; d) $\{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9\}$. 5. a) $\{0, 1\}$; b) $\{0, 1, 2, 3\}$; c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 6. $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. 7. $1 \in A, 1 \notin B, 1 \notin C; 2 \in A, 2 \in B, 2 \notin C; 7 \notin A, 7 \notin B, 7 \in C; 8 \notin A, 8 \notin B, 8 \in C; 9 \notin A, 9 \notin B, 9 \notin C$. 8. Nu. De ce? 9. $A = \emptyset; B = \{1, 2, 3\}; C = \{1, 2, 3, 4, 5\}; D = \{4, 5, 6, 7\}; E = \{3, 4, 5, 6\}; F = \{3, 4\}$. 10. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{2, 3, 4, 5\}; C = \{2, 3, 4\}; D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 11. a) $\{11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99\}$; b) $\{\text{primăvara, vara, toamna, iarna}\}$; c) $\{\text{Europa, Asia, America de Nord, America de Sud, Australia, Africa, Antarctica}\}$; d) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; e) $\{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$; f) $\{a; u; x; i; l; r\}$; g) $\{1; 2; 3; 0; 7; 5\}$; h) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ etc. 12. $A = \{1; 2; 3\}; B = \{5; 7; 9\}; C = \{5; 8; 10\}$; b) $A = \{\Delta, \star, \square\}; B = \{\square, \bigcirc, \bullet, \}$; $C = \{\blacktriangle, \star\}$ c) $A = \{a; b; c; d\}; B = \{g; f\}; C = \{m; f; g\}$. 13. a) $A = \{21; 23; 25; 27; 29; 31; 33\}$ sau $A = \{x \in \mathbb{N} / 19 < x < 34, x \text{ impar}\}$ sau $A = \{x \in \mathbb{N} / x = a^3\}; B = \{x \in \mathbb{N} / x = 1a, a \neq 0\}; C = \{x \in \mathbb{N} / 6 \leq x \leq 9\}; D = \{x / x \text{ este literă a cuvântului „arc”}\}; E = \{x / x \text{ este literă a cuvântului „bar”}\}$ sau prin diagrame Wenn-Euler. 15. $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}; B = \{1; 3; 5; 7; 9\}; C = \{c; a; s; d; \bar{a}\}; D = \{0; 1; 2; 3\}; E = \{218; 219; 220; 221; 222; 223; 224; 225\}; F = \{22; 44; 66; 88\}$. 17. a) $A = \{20; 22; 24; 26; 28; 30; 32\}; A = \{x \in \mathbb{N} / 19 < x < 34, x \text{ par}\}$ sau prin diagrame alăturate. 18. $A = \{x \in \mathbb{N}^* / 5/x \text{ și } x \leq 5\}; B = \{x \in \mathbb{N} / x = 2^k, k \in \mathbb{N}^*, k \leq 6\}; C = \{x \in \mathbb{N} / x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\}; D = \{x \in \mathbb{N} / 10 \leq x \leq 16\}; E = \{x \in \mathbb{N} / x < 8\}; F = \{x \in \mathbb{N} / x = 2^a + 1, a \in \mathbb{N}^*, 1 < a \leq 5\}$. 19. a) A; b) A; c) F; d) F; e) A; f) A; g) A; h) F; i) A. 20. Sunt adevărate a), c), d), f) g), h), i), k), l), celelalte fiind false. 21. a) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; d) $\{4\}$; e) $\{27, 64\}$; f) $\{x \in \mathbb{N} / x \text{ impar}\}$. 22. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; B = \{2, 3, 4, 5\}; C = \{0, 1, 2, 3\}; D = \{7, 14, 21, 28, 35\}; E = \{1, 5, 9, 13, 17\}; F = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$. 23. card $A = 5$; card $B = 900$; card $C = 31$; card $D = 7$; card $E = 5$; card $F = 8$; card $G = 2$; card $H = 1$; card $I = 5$; card $J = 2008$; card $K = 200$; card $L = 2004$.

II.3. Relația între două mulțimi (relația de incluziune); submulțime

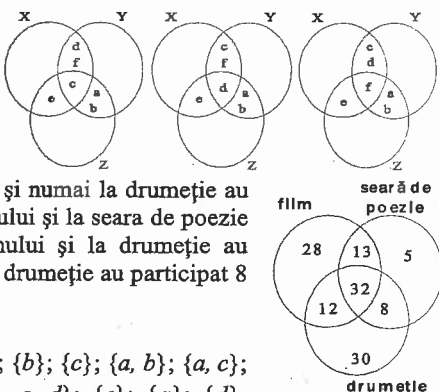
1. Da. 2. 7. 3. $\{3, 4\}$; 4. 16. 5. $n \in \{0, 1, 4, 5\}$. 6. $\{1, 2, 3\}; \{0, 1, 2, 3\}; \{1, 2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 5\}; \{0, 1, 2, 3, 4\}; \{0, 1, 2, 3, 5\}; \{1, 2, 3, 4, 5\}; \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 7. $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}$. 8. $\emptyset; \{3\}; \{4\}; \{5\}; \{3, 4\}; \{3, 5\}; \{4, 5\}; \{3, 4, 5\}$. 9. a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) F; 10. Card $A = 4$, card $B = 4$, card $C = 5$. Sunt adevărate propozițiile: a), b), d), h), i), l). 11. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) F, F, A, A, A, F, F. 12. a) $\supset$; b) $\subset$; c) $\subset$; d) $\subset$; e) $\subset$; f) $\supset$; g) $\subset$; h) $\subset$. 13. a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}; B = \{0; 2; 4; 6; 8\}; C = \{5; 7; 9; 11\}; D = \{11; 13; 17; 19\}; E = \{2; 3; 4; 5\}; F = \{0; 2; 4; 6; 8\}$; b) $B \subset A; C \subset A; B \not\subset C; C \not\subset B; D \not\subset A; A \not\subset D; D \not\subset B; B \not\subset D; E \subset A; F \subset A; E \not\subset F; F \not\subset E$ etc. 14. a) 20 de elevi; b) card $A \cap D = 2$ fete care poartă ochelari; c) $20 - \text{card } B = 20 - 9 = 11$. d) $M \subset A$, deci nu există băieți înscriși la cercul de matematică. e) $20 - \text{card } A = 20 - 9 = 11$. f) $M \subset A$, iar mulțimile C și D sunt disjuncte. 15. $A = B = C = \{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19\}$. 16. a) $n = 7$; b) $n = 3$; c) $n = 10$; d) $n = 7$; e) $n \in \{3; 4\}$. 17. a) $n \in \{0; 1; 4\}$; b) $n \in \{2; 3; 5\}$; c) $n \in \{1; 2; 4\}$. 18. $\Phi; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}$. 19. a) $\{1; 2; 3\}; \{0; 1; 2; 3\}; \{1; 2; 3; 4\}; \{1; 2; 3; 5\}; \{0; 1; 2; 3; 4\}; \{0; 1; 2; 3; 5\}; \{1; 2; 3; 4; 5\}; \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ etc.

II.4. Operații cu mulțimi (intersecție, reuniune, diferență)

1. $A = \{2, 3, 4, 6, 9\}; B = \{1, 3, 4, 5, 10\}; C = \{3, 5, 6, 7, 8\}$ etc. 2. $\{1, 2, 3, 4, 5\}; \{1\}; \{5\}$. 3. $\{a, b, c, d, e\}; \{a, b, c, d, e, f\}; \{a, b, c, d, e, f\}; \{b, c\}; \{c, e\}; \{c\}; \{a, d\}; \{f\}$. 4. $\{2\}; \{3, 4, 5\}$. 5. A trebuie să conțină mulțimea $\{1, 4\}$. 6. a) 10; b) 10; c) 5. 7. $\{1, 3, 5, 8, 10, 12\}$ și $\{2, 4, 6, 7, 9, 11\}$. Soluția nu este unică. 8. Din a) și b) rezultă $3 \cdot 5 \in A$, adică $15 \in A$. (1) Din $5 \in A$ și c) rezultă $45 \in A$, adică $20 \in A$. (2) Din b), (1) și (2) rezultă $15, 20 \in A$, adică $300 \in A$. Din $5 \in A \xrightarrow{d} 5^2 - 9 \in A$, adică $16 \in A \xrightarrow{d} 16^2 - 9 \in A$, adică $247 \in A$. 9. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}; \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}; \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}; \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; \{4\}; \{1, 2, 4, 8\}; \{1, 3\}; \{2, 4, 8\}; \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}; \{1, 4\}; \emptyset; A \cup B \cup C$. 11. a) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}; B = \{2, 3, 6\}; C = \{4, 5, 6\}$. b) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}; B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}; A \cap B = \{4, 5\}; B \cap C = \{2, 3\}; C \cap A = \emptyset; A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}; A \cap C = \{4, 5, 6\}; A \cap B = \{2, 3, 6\}; B \cap C = \{6\}; (A \cap B) \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. 12. $A = \{3, 9\}; B = \{3\}; C = \{8\}$. 13. $x = 7$. 14. $n = 9$. 15. $X = \{0, 1, 2\}$ sau $X = \{0, 1, 2, 3\}$. 16. $B = \{6; 7\}$. 17. Din (3) se deduce că $0 \in X$, iar din (2) că $\{1, 3\} \subset X$. Mulțimea X poate fi: $\{0, 1, 3\}$ sau $\{0, 1, 3, 4\}$. 18. $B = \{2, 3, 4, 5\}$. 19. $B = \{1, 3\}$. 20. $A = \{2, 6, 8\}; B = \{4, 6, 8\}$ sau $A = \{6, 8\}; B = \{2, 4, 6, 8\}$. 21. $A = \{a, b, c, d\}; B = \{c, d, e, f, g\}$. 22. Vezi figura alăturată. Din (1) rezultă că $\{b, e\} \subseteq X$ și $\{b, e\} \subseteq Y$ (4). Din (1) și (2) rezultă că $\{c, f\} \subseteq X$ și $c \notin Y; f \notin Y$ (5). Din (1) și (3) rezultă că $\{a, d\} \subseteq Y$ și $d, a \notin X$ (6). Din (4), (5) și (6) rezultă că $X = \{b, c, e, f\}$ și $Y = \{a, b, d, e\}$. 23. Din (2) rezultă că $\{a, b\} \subseteq A$ și $\{a, b\} \subseteq B$ (5). Din (1) și (3) rezultă că $\{c, d\} \subseteq B$ și $c, d \notin A$ (6). Din (1) și (4) rezultă că $\{e, f\} \subseteq A$ și $e, f \notin B$ (7). Din (1), (5), (6) și (7) rezultă că $A = \{a, b, e, f\}$ și $B = \{a, b, c, d\}$. 24. Din $A = \{1, 2, 3\}; B = \{1, 4, 7, a\}$ și $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7\} \Rightarrow a \in \{2, 3\}$. Dacă $a = 2$ din: $B = \{1, 2, 4, 7\}; C = \{2, 3, 4, 8, b\}$ și $B \cap C = \{1, 2, 4\} \Rightarrow b = 1$. Pentru $a = 3$, nu se obține soluție. 25. $A \setminus B = \{0; 5\}; A \setminus C = \{1; 3; 5\}; B \setminus C = \{1; 3\}; C \setminus A = \{4; 6\}; C \setminus B = \{0; 6\}; B \setminus A = \{4\}; (A \setminus B) \setminus C = \{5\}$. 26. $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}; B = \{1; 2; 3\}; C = \{2; 3; 4; 5; 6\}; A \setminus B = \{0; 4\}; A \setminus C = \{0; 1\}; B \setminus A = \emptyset; B \setminus C = \{1\}; C \setminus A = \{5; 6\}; C \setminus B = \{4, 5, 6\}; A \setminus \emptyset = A; \emptyset \setminus B = \emptyset; (A \setminus B) \setminus C = \{0\}$. 27. $X = \{1, 2\}$ și $Y = \{3, 5\}$ sau $X = \{1, 2, 4\}$ și $Y = \{3, 4, 5\}$. 28. Din (2) se deduce că $0 \in B$, apoi din (3) că $0 \in A, 2, 3, 4 \in B$ și $2, 3, 4 \notin A$. Se obțin soluțiile: $A = \{0, 1\}; B = \{0, 2, 3, 4\}$ și $A = \{0, 1\}; B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 29. $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}; B = \{a, c, e, g\}$. 30. $A = \{a, b, c\}; B = \{c, d\}; C = \{a\}$. 31. $A = \{a, b, d\}; B = \{a, b, c\}$. 32. $A = \{a, b, c, d\}; B = \{a, d\}; C = \{a, c, e\}$. 33. Din (2) rezultă că $1 \in A, 2 \in A$ și $1 \notin B, 2 \notin B$. Din (3) rezultă că $7 \in B, 8 \in B$ și $7 \notin A, 8 \notin A$. Din (4), (5) și (1) rezultă că $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și

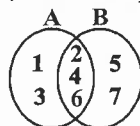
$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. 34. $(2) \Rightarrow \{2, 3\} \subset A, \{2, 3\} \subset B, \{2, 3\} \subset C$. $(3) \Rightarrow \{4, 5, 6, 8\} \subset A$ și $4, 5, 6, 8 \in C$. $(4) \Rightarrow \{4, 6, 7, 9\} \subset B$ și $4, 6, 7, 9 \in C$. Deci $A \supset \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $B \supset \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $C \supset \{2, 3\}$. Se arată că: $5, 8 \notin B$; $7, 9 \notin A$; $1 \notin A \cap B$ și $1 \in C$. Se obține $C = \{1, 2, 3\}$ și $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ sau $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$; $B = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ sau $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. 35. $A = \{1, 3\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{2\}$ sau $A = \{3\}$; $B = \{1, 2\}$; $C = \{2\}$ sau $A = \{1, 3\}$; $B = \{2\}$; $C = \{2\}$. 36. 50. 37. a) $(20 + 15) - 25 = 10$; b) 10 respectiv 5. 38. $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 4\}$, $\{0, 1, 3, 4\}$, $\{0, 2, 3, 4\}$.

39. Vezi figura alăturată. $X = \{c, d, e, f\}$, $Y = \{a, b, c, d, f\}$, $Z = \{a, b, c, e\}$ sau $X = \{c, d, e, f\}$, $Y = \{a, b, c, d, f\}$, $Z = \{a, b, d, e\}$ sau $X = \{c, d, e, f\}$, $Y = \{a, b, c, d, f\}$, $Z = \{a, b, e, f\}$. 40. $A = \{b, d, e\}$ și $B = \{a, b, c, d\}$ sau $A = \{b, c, d\}$ și $B = \{a, b, d, e\}$. 41. a) Numai la vizionarea filmului au participat 28 de elevi, numai la seara de poezie au participat 50 de elevi și numai la drumeție au participat 30 de elevi. b) Numai la vizionarea filmului și la seara de poezie au participat 13 elevi, numai la vizionarea filmului și la drumeție au participat 12 elevi și numai la seara de poezie și la drumeție au participat 8 elevi (vezi fig. alăturată).

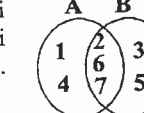
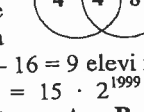
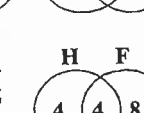
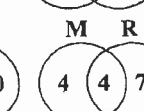
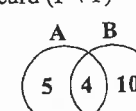
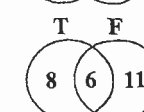
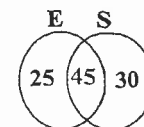


II. 5. Mulțimi. Exerciții recapitulative 1. a) $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$;

$\{b, c\}$; $\{a, b, c\}$; b) $\{a, b, c, d\}$; $\{c, d\}$; $\{a, b, c, d\}$; $\{c\}$; $\{a\}$; $\{d\}$. 2. $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $\{1, 2, 3, 4\}$; c) $\{1, 2\}$; d) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. 3. $A = \{140, 142, 144, 146, 148\}$; $B = \{1400, 1410, \dots, 1490, 1405, 1415, \dots, 1495\}$; $C = \{1710\}$; $D = \{202, 404, 606, 808\}$; $E = \{1230, 2230, 3230, 4230, 5230, 6230, 7230, 8230, 9230\}$. 4. $\emptyset$; $\{6\}$; $\{7\}$; $\{6, 7\}$. 5. $x = 5$, $y = 2$. 6. a) $\{1, 3\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 24\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$. 7. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$; $A \cap C = \{1, 2\}$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$; $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$; b) $\{1, 2, 7\}$; $\{0, 1, 2, 3, 6, 7\}$; $\{1, 2, 7\}$. $B \setminus A = \{5, 7\}$. 8. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ etc. 9. a) $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $\emptyset$; $\{0\}$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{0, 1\}$; $\{0, 2\}$; $\{1, 2\}$; $\{0, 1, 2\}$; c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $A \cap B = \{0, 1, 2\}$; $A \setminus B = \emptyset$; $B \setminus A = \{3, 4\}$. 10. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ sau $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{1, 3\}$. 11. a) $B = \{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $C = \{5, 10, 15\}$ etc. b) $\emptyset$, $\{5\}$, $\{10\}$, $\{15\}$, $\{5, 10\}$, $\{5, 15\}$, $\{10, 15\}$, $\{5, 10, 15\}$. 12. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 13. a), c), d), e), i), j), k) – mulțimi finite; b), f), g), h) – mulțimi infinite. 14. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $B \setminus C = \{1, 3, 4\}$; $(A \cup B) \cap C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $(C \setminus B) \cup A = \{0, 5, 6\} \cup \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ etc. 15. a) $A = \{16, 32, 48\}$; $B = \{2, 4, 8, 16\}$; $C = \{8, 12, 16, 20\}$; b) $A \cup B = \{2, 4, 8, 16, 32, 48\}$, $A \cup C = \{8, 12, 16, 20, 32, 48\}$, $B \cup C = \{2, 4, 8, 16, 20\}$, $B \cap C = \{8, 16\}$, $A \cap B \cap C = \{16\}$; c) $A = \{x \in \mathbb{N}^* / x = 16k, k \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / x = 4k, k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq 5\}$. 16. $A = \{1, 3, 6, 7\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Deci $B \setminus A = \{5, 7\}$. 17. $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ și $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$. 18. card $A = 8$, card $B = 2012 - 8 = 2004$; card $C = 34$; card $D = 5$. 19. $A = \{x \in \mathbb{N} / x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 6\}$. $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 2n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 6\}$. $C = \{x \in \mathbb{N} / x = 3n + 1, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 6\}$. $D = \{x \in \mathbb{N} / x = n + 1, n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 6\}$. 20. $10/abc$ implică $c = 0$; $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ și $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Card $A = 10 \cdot 9 = 90$.



21. $5/abc$ implică $c \in \{0, 5\}$ și cum $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ și $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ rezultă card $B = 2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$. 22. $2/abcd$ implică $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și cum $a \neq 0$, iar cum $c, d \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ rezultă card $A = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$. 23. $2^n + 1 = 5$ implică $n = 2$. 24. $2^n + 3 = 67$ implică $n = 6$. 26. $3^{n+m} + 7 = 88$ implică $n + m = 4$. Deci putem avea: $n = 4, m = 0$ sau $n = 3, m = 1$ sau $n = 2, m = 2$ sau $n = 1, m = 3$ sau $n = 0, m = 4$. 27. a) Ambele limbi sunt utilizate de $(70 + 75) - 100 = 45$. Deci card $E \cap S = 45$; b) $70 - 45 = 25$; c) $75 - 45 = 30$. 28. card $T \cup F = \text{card}(T \setminus F) + \text{card}(F \setminus T) + \text{card}(T \cap F) = 8 + 6 + 11 = 25$. În clasă sunt 25 de elevi. 29. Card $A \cup B = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B) = 19$. 30. a) $(10 + 11 + 8) - 25 = 4$; b) $8 - 4 = 4$. 31. a) $A = \{x \in \mathbb{N}^* / 3/x \text{ și } x \leq 12\}$; c) În ambele cazuri sunt câte 8 submulțimi. 32. $M = \{0, 1, 2, 3\}$; $S = \{3, 4, 7, 12\}$; $P = \{1, 3, 9, 27\}$ etc. 34. Card $A = 19$. Atenție! Într-o mulțime un element apare o singură dată. 35. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $B = \{0, 1, 2, 3\}$; $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$; b) $B \subset A$; $A \subset C$; $B \subset C$; c) card $C = 9$. 36. $8 - 4 = 4$ elevi ai clasei fac parte numai din echipa de handbal, iar $12 - 4 = 8$ elevi fac parte numai din echipa de fotbal. Deci numai $4 + 4 + 8 = 16$ elevi ai clasei fac sport. Urmează că $25 - 16 = 9$ elevi nu fac parte din nicio echipă sportivă a clasei. 37. card $A = 2000$; card $B = 15 \cdot 2^{1999} = 2^{2003} - 2^{1999}$. 38. Ultimele cifre ale elementelor mulțimii A aparțin mulțimii $\{8, 3, 2, 7\}$, deci niciun element al mulțimii A nu este pătrat perfect și urmează că $A \cap B = \emptyset$. 39. $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ și $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$. 40. $x = 2, y = 3, z = 4, t = 1$.



Test 18 1. $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. 2. 8. 3. $\{0, 1, 2, 4, 5\}$. 4. $\{1, 3\}$. 5. A. 6. 5. 7. 1003. 8. $\{2\}$. 9. $\{0, 1\}$. 10. 189. 11. A. 12. $A = \{1\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $A \cup B = B$; $A \cap B = A$; $A \setminus B = \emptyset$; $B \setminus A = \{0, 2, 3, 4\}$. 13. $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Test 19 1. $A = \{2, 3, 4\}$. 2. 15. 3. $A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 8\}$. 4. $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. 5. $x = 3$; 6. 16. 7. "A". 8. A. 9. 3. 10. a) $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\emptyset$; $\{1, 2, 3, 4\}$; $\{0\}$. 11. $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$; $B = \{0, 2, 5, 7\}$. 12. 12.

Test 20 1. D. 2. a) A; b) D; c) C. 3. B. 4. C. 5. A. 6. A. 7. C.

Bibliografie

1. BĂLĂUCĂ, A. și colaboratorii. *Matematica în sprijinul elevilor din clasele V-VIII pentru concursurile școlare*, Universitatea „Al. I. Cuza” Iași, 1989
2. BĂLĂUCĂ, A., ȚICALO, I. *Matematica în sprijinul elevilor din clasele V - VIII pentru concursurile școlare*, Alpha, Botoșani, 1991
3. BĂLĂUCĂ, A., ȚICALO, I. *Probleme semnificative pentru concursurile școlare Aritmetică și algebră clasele V-VI*, Editura Remos, Chișinău, 1995
4. BĂLĂUCĂ, A. și colaboratorii. *Matematica. Clasa a V-a. Auxiliar la manualele alternative*, Editura Taida, Iași, 2012
5. BĂLĂUCĂ, A., și colaboratorii - *Aritmetică. Olimpiade și concursuri. Clasa a V-a*, Editura Taida, Iași, 2013
6. BRÂNZĂNESCU, V. (coordonator) și colectiv. *Culegere de probleme de matematică*, Editura Tehnică, București, 1987
7. MIRON, R., BRÂNZEI, D. *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Editura Academiei, București, 1983
8. POPOVICI, C. *Teoria numerelor*, E. D. P., București, 1973
9. RUSU, E. *Matematica. Manual pentru liceele pedagogice*, E. D. P., București, 1970
10. TEODORESCU, N. (coordonator) și colectiv. *Culegere de probleme în sprijinul elevilor claselor I-VIII*, editată de S. S. M., București 1985
11. Manuale alternative, ediția 1997
12. *Gazeta Matematică* din anii 1964 – 2013

Autorii COLECȚIEI DIDACTICA, dascăli cu o experiență didactică și editorială de excepție, au conceput lucrările în spiritul manualelor europene, conducând la realizarea obștinutelor elevilor de a apela la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene și practice!

Lucrările prezentate în această listă sunt adresate elevilor din clasele I – VIII, iar materialele și formele propuse sunt tratate pe baze intuitive și logice, după cerințele Programei școlare, oferind situații de învățare interactive și productive bazate pe interesul specific vârstei.

De aceea ...

EDITURA TAIDA VĂ PROPUNE:

COLECȚIA DIDACTICA – MATE BT

1. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. Clasa a V-a
2. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. Clasa a V-a, Semestrul I
3. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. Clasa a V-a, Semestrul II
4. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VI-a
5. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VI-a, Semestrul I
6. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VI-a, Semestrul II
7. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VII-a
8. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VII-a, Semestrul I
9. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VII-a, Semestrul II
10. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VIII-a
11. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VIII-a, Semestrul I
12. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ ALGEBRĂ. GEOMETRIE, Clasa a VIII-a, Semestrul II
13. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ MATEMATICĂ. TEME PENTRU ACTIVITĂȚI OPȚIONALE, Clasele V-VIII

COLECȚIA DIDACTICA – LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ

1. L. Buhaciuc și colaboratorii ⇒ LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ, Clasa a V-a
2. L. Buhaciuc, L. Poclid ⇒ LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. Clasa a VI-a
3. L. Buhaciuc și colaboratorii ⇒ LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. Clasa a VII-a
4. L. Buhaciuc ⇒ LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ, Clasa a VIII-a

COLECȚIA DIDACTICA – CONCURSURI ȘI OLIMPIADE

1. A. Bălăucă ⇒ MATEMATICĂ. OLIMPIADE, CONCURSURI ȘI CENTRE DE EXCELENȚĂ, Clasa a V-a
2. A. Bălăucă ⇒ MATEMATICĂ. OLIMPIADE, CONCURSURI ȘI CENTRE DE EXCELENȚĂ, Clasa a VI-a
3. A. Bălăucă ⇒ MATEMATICĂ. OLIMPIADE, CONCURSURI ȘI CENTRE DE EXCELENȚĂ, Clasa a VII-a
4. A. Bălăucă ⇒ MATEMATICĂ. OLIMPIADE, CONCURSURI ȘI CENTRE DE EXCELENȚĂ, Clasa a VIII-a
5. A. Bălăucă și colaboratorii ⇒ MATEMATICĂ. OLIMPIADELE NAȚIONALE ALE ROMÂNIEI ȘI REPUBLICII MOLDOVA. BALCANIADA DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI, Clasele V - VIII
6. A. Bălăucă ⇒ 12 EDIȚII ALE CONCURSULUI ÎNTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „DIMITRIE POMPEIU”
7. J. Grigoraș, I. Nechifor, A. Păduraru ⇒ CONCURSUL DE MATEMATICĂ „FLORICA T. CÂMPAN”, Clasele IV-VIII
8. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CONCURSUL DE MATEMATICĂ „EUCLID” Iași; Clasele III– VIII
9. CONCURSUL DE MATEMATICĂ „EUCLID” FOCȘANI, Clasele II–VII
10. TESTE PENTRU CONCURSURILE LB. ROMÂNĂ „MICI ALECSANDRIȘTI”, CLASA A IV-A ȘI „ALECSANDRIȘTI”, Clasele V – VIII

COLECȚIA DIDACTICA – EVALUARE NAȚIONALĂ

1. Artur Bălăucă și colaboratorii ⇒ MATEMATICĂ. EVALUARE NAȚIONALĂ. Clasa a VIII-a
2. Laura Buhaciuc ⇒ LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. EVALUARE NAȚIONALĂ. Clasa a VIII-a

COLECȚIA DIDACTICA – ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR

1. C. Palade, L. Palade ⇒ PAȘI SPRE ȘCOALĂ, Clasa pregătitoare / Clasa I
2. V. Avîrvărei ⇒ DESENUL MEU ABC..., Clasa I
3. C. Palade și colaboratorii ⇒ MATEMATICĂ ȘI EXPLORAREA MEDIULUI. Clasa I
4. V. Avîrvărei ⇒ PRIMA MEA CARTE - ABC..., Clasa I
5. C. Palade ⇒ CAIET DE SCRIERE, Clasa I
6. V. Avîrvărei și colaboratorii ⇒ MATEMATICĂ. Clasa a II-a
7. C. Palade și colaboratorii ⇒ LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. Clasa a II-a
8. C. Palade și colaboratorii ⇒ INVITAȚIE LA LECTURĂ. AUXILIAR PENTRU ORELE DE LECTURĂ, Clasa a II-a
9. V. Avîrvărei și colaboratorii ⇒ MATEMATICĂ. Clasa a III-a
10. C. Palade și colaboratorii ⇒ LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. Clasa a III-a
11. C. Palade și colaboratorii ⇒ INVITAȚIE LA LECTURĂ. AUXILIAR PENTRU ORELE DE LECTURĂ, Clasa a III-a
12. B. Gherasim, M. Morăraș ⇒ ȘTIINȚE ALE NATURII, Clasa a III-a
13. V. Avîrvărei și colaboratorii ⇒ MATEMATICĂ. Clasa a IV-a

14. C. Palade și colaboratorii ⇨ LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. Clasa a IV-a
15. C. Palade și colaboratorii ⇨ INVITAȚIE LA LECTURĂ. AUXILIAR PENTRU ORELE DE LECTURĂ, Clasa a IV-a
16. B. Gherasim, M. Morăraș ⇨ ȘTIINȚE ALE NATURII, Clasa a IV-a
17. A. Bălăuță și colaboratorii ⇨ MATEMATICĂ. 900 DE PROBLEME PENTRU MICII MATEMATICIENI, Clasele I - IV
18. C. D. Tamaș ⇨ 100 PROBLEME DE LOGICĂ
19. J. Grigoraș, I. Nechișor, A. Păduraru, L. Ștefan ⇨ CONCURSUL DE MATEMATICĂ „FLORICA T. CÂMPAN”, Clasele I - IV
20. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CONCURSUL DE MATEMATICĂ „EUCLID” Iași, Clasele III - VIII
21. CONCURSUL DE MATEMATICĂ „EUCLID” Focșani, Clasele II - VII
22. C. Palade, L. Palade ⇨ MUZICA VOCALĂ, Clasele III-IV
23. C. Palade, L. Palade ⇨ CÂNTECUL FULGILOR DE NEA
24. M. Ungureanu, L. Vălavu ⇨ GHIOCEI PENTRU MAMA
25. C. Palade, L. Palade ⇨ EDUCAȚIE MUZICALĂ. GHID METODIC PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNT PREȘCOLAR ȘI PRIMAR
26. R. Lazăr, A. Păduraru, I. Nechișor ⇨ LET'S HAVE FUN WITH MATH, Clasele I-IV

COLECȚIA DIDACTICĂ - NE PREGĂTIM PENTRU EVALUARE ÎNȚĂLĂ ȘI ÎNȚĂLĂ

1. C. Palade și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUAREA ÎNȚĂLĂ ȘI ÎNȚĂLĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ. ȘTIINȚE ALE NATURII, Clasa I
2. C. Palade și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ ȘI ÎNȚĂLĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ. ȘTIINȚE ALE NATURII, Clasa a II-a
3. C. Palade și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUAREA ÎNȚĂLĂ ȘI ÎNȚĂLĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ. ȘTIINȚE ALE NATURII, Clasa a III-a
4. C. Palade și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ ȘI ÎNȚĂLĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ. ȘTIINȚE ALE NATURII. GEOGRAFIE. ISTORIE, Clasa a IV-a
5. A. Bălăuță și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUARE. MATEMATICĂ. BIOLOGIE. FIZICĂ, Clasa a V-a
6. M. Coșofan și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUARE. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. GEOGRAFIE. ISTORIE, ENGLEZĂ. FRANCEZĂ, Clasa a V-a
7. A. Bălăuță și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUARE. MATEMATICĂ. BIOLOGIE. FIZICĂ. CHIMIE, Clasa a VI-a
8. M. Coșofan și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUARE. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. GEOGRAFIE. ISTORIE, ENGLEZĂ. FRANCEZĂ, Clasa a VI-a
9. A. Bălăuță și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUARE. MATEMATICĂ. BIOLOGIE. FIZICĂ. CHIMIE, Clasa a VII-a
10. M. Coșofan și colaboratorii ⇨ NE PREGĂTIM PENTRU EVALUARE. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. GEOGRAFIE. ISTORIE, ENGLEZĂ. FRANCEZĂ, Clasa a VII-a

COLECȚIA DIDACTICĂ - CAIETE DE VACANȚĂ

1. V. Avîrvărei și colaboratorii ⇨ CAIET DE VACANȚĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ, Clasa I
2. V. Avîrvărei și colaboratorii ⇨ CAIET DE VACANȚĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ, Clasa a II-a
3. V. Avîrvărei și colaboratorii ⇨ CAIET DE VACANȚĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ. ȘTIINȚE ALE NATURII. EDUCAȚIE CIVICĂ, Clasa a III-a
4. V. Avîrvărei și colaboratorii ⇨ CAIET DE VACANȚĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ. ȘTIINȚE ALE NATURII. GEOGRAFIE. ISTORIE, Clasa a IV-a

COLECȚIA DIDACTICĂ

1. M. Chirilă ⇨ VIITORUL ÎNCEPE AZI. GHID DE CONSILIERE ȘI ORIENTARE ȘCOLARĂ PENTRU ELEVII, Clasele V - VIII
2. E. M. Vlasie și colaboratorii ⇨ PORTOFOLIUL DIRIGINTELUI (CLASE GIMNAZIALE)

COLECȚIA DIDACTICĂ - ÎNVĂȚĂMÂNT LICEAL

1. Lăduncă Lucian-Georges ⇨ BORNE PENTRU MATEMATICIENI. ALGEBRĂ-ANALIZĂ, Clasele IX-XII
2. Rotaru Petru ⇨ DETERMINANȚI MICȘTI, CULEGERE DE MATEMATICĂ PENTRU LICEU
3. Eleonora Savu ⇨ CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a XI-a
4. Dan Brânzei, Alexandru Negrescu ⇨ PROBLEME DE PIVOTARE
5. CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”, Clasele IX-XII

PENTRU OFERTA COMPLETĂ VIZITAȚI
www.editurataida.ro

Editura TAIDA și ALPHA GROUP doresc să fie o parte activă în cadrul procesului de modernizare a sistemului educațional românesc prin oferta de table interactive și softuri educaționale.
www.mimio.ro

© Editura TAIDA

Toate drepturile aparțin Editurii TAIDA. Nicio parte a acestei cărți nu poate fi retipărită, reprodusă sau utilizată în orice alt fel, inclusiv prin fotocopiare sau în formă electronică, fără avizul prealabil în scris al editurii.

PENTRU COMENZI VĂ RUGĂM SĂ VĂ ADRESAȚI EDITURII TAIDA

○ La adresa: Str. Holboca, nr. 9-11, Iași - 700384

○ Telefonice:

Romtelecom Tel./Fax: 0232.270250; 0232.270260

Orange: 0748.234137; 0374.040506

Vodafone: 0722.824914

Cosmote: 0765.313632

Rds: 0770430169

○ Prin email: office@editurataida.ro

○ Web: www.editurataida.ro; www.mimio.ro

www.editurataida.ro

www.mimio.ro

Editor: AIDA TCACIUC
Corector: ARTUR BĂLĂUȚĂ
Tehnoredactare: ALINA POLEUȚĂ
Dtp: MIHAELA URSULEANU
Coperta: MIHAELA URSULEANU

